



Cours de Traitement de Signal et Communication Numérique

CH3: Le Filtrage Analogique

Par:

Hassan EL FADIL

elfadil.h@gmail.com

1. Rôle du filtrage

- **Définition:** Un filtre est un dispositif électronique (amplificateur ou atténuateur) dont le gain dépend de la fréquence. De ce fait il va laisser passer certaines composantes spectrales et en arrêter d'autres.
- **Rôle:** Séparation des signaux utiles des signaux indésirables
- **Exemples d'applications :**
 - *systèmes de télécommunication (téléphone, télévision, radio, transmission de données...)*
 - *systèmes d'acquisition et de traitement de signaux physiques (surveillance médicale, ensemble de mesure, radars...)*
 - *alimentation électrique....*

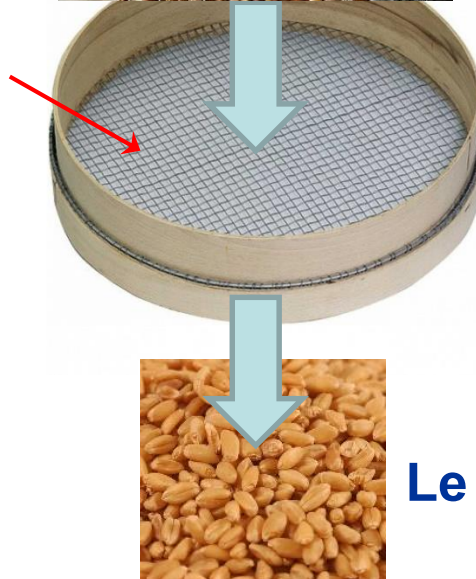
Exemple Introductif

- Prenons un exemple introductif de filtrage dans lequel l'objectif est de séparer le blé des cailloux !
- Supposons que la **taille des cailloux est plus grande que celle du blé**:



Les **mailles** du tamis ou les **ouvertures** doivent être sélectionnées de manière à permettre le passage du blé tout en bloquant les cailloux.

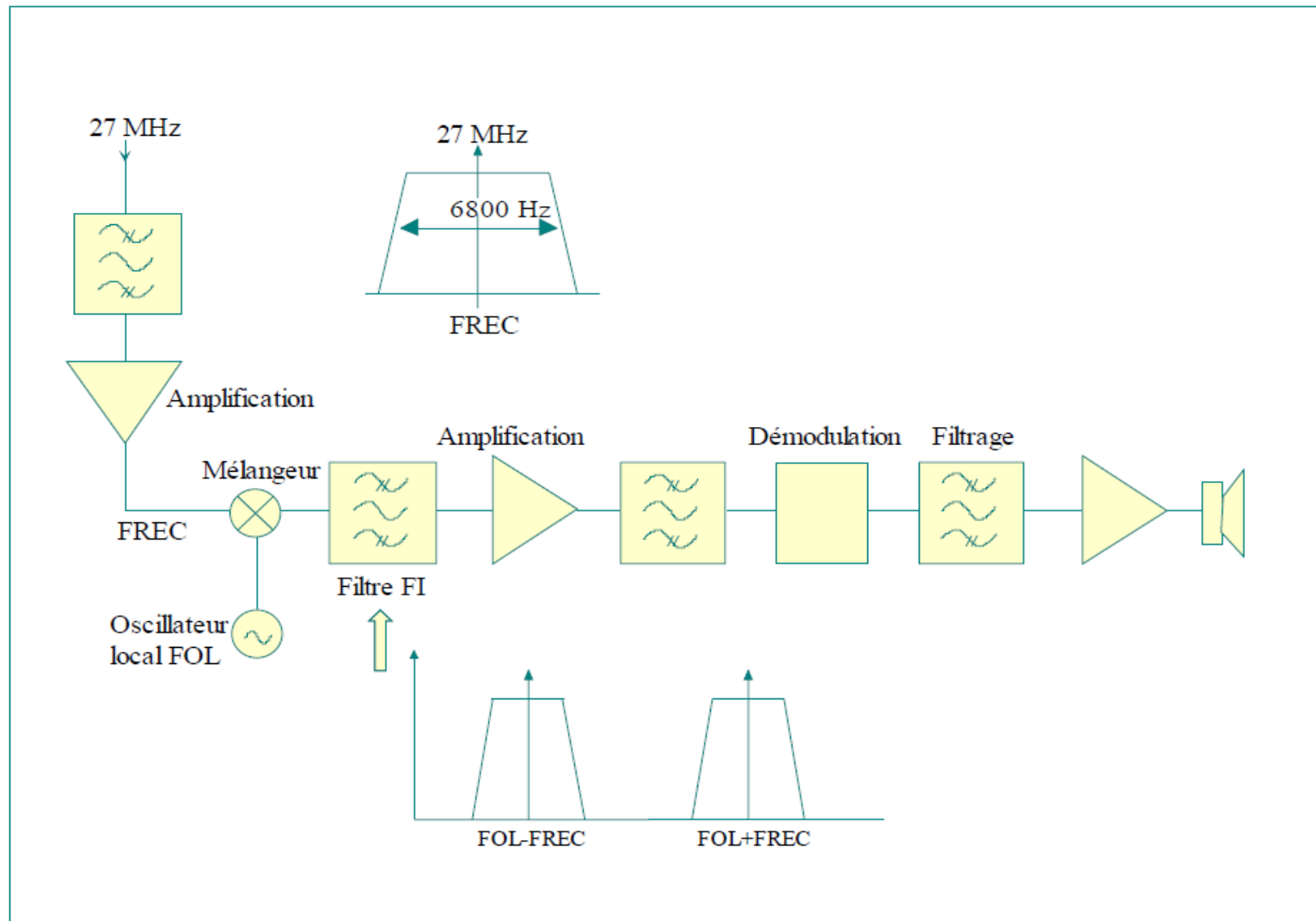
Blé (C'est l'équivalent de l'Information utile)
Cailloux (C'est l'équivalent de l'Information Inutile)

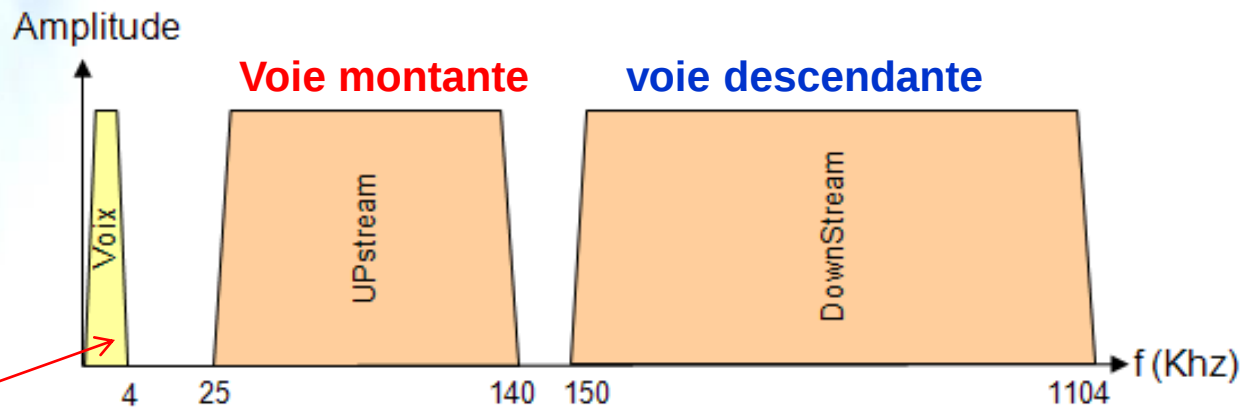


Tamis (c'est l'équivalent du Filtre)

C'est l'équivalent de la fréquence de coupure du filtre

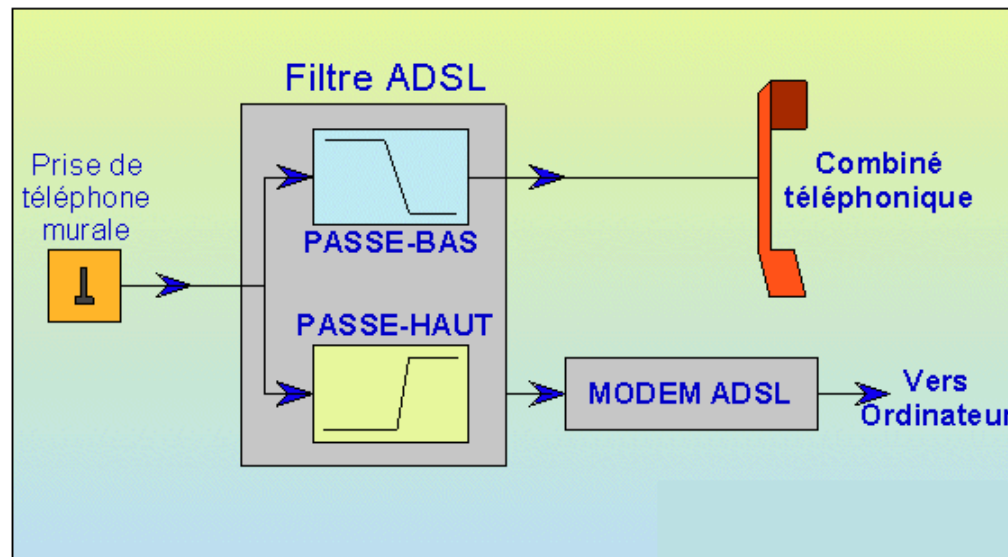
Le tamis laisse passer l'utile (Blé)





RTC analogique

RTC: Réseau
Téléphonique
Commuté



2. Différents types de Filtres

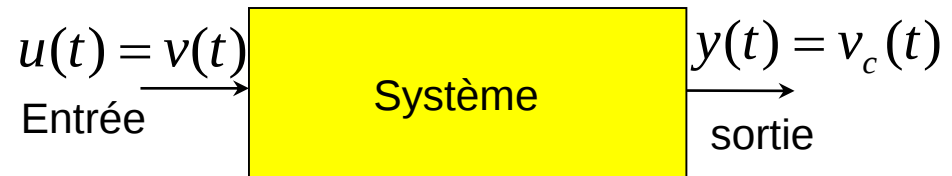
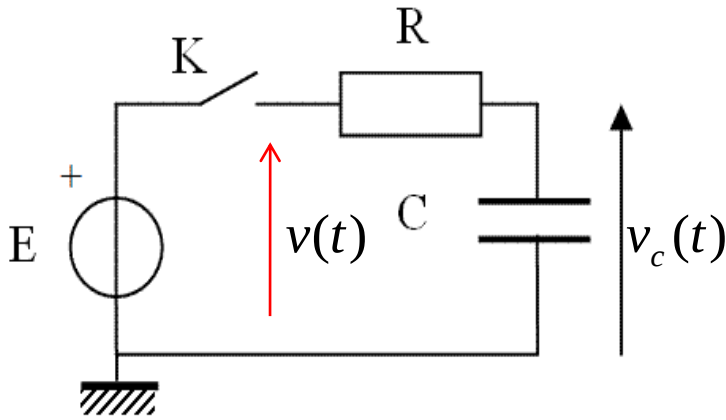
- On classe les filtres en deux grandes familles : **ANALOGIQUE** et **NUMERIQUE**.
- **Les filtres numériques:**
 - *Ils sont réalisés à partir de structure intégrée micro-programmable (microcontrôleurs, DSP, ..).*
 - *Ils sont totalement intégrables, souples et performants.*
 - *Ils sont pour l'instant limités à des fréquences pas trop élevées (**< 100MHz**).*

- **Les filtres analogiques** se divisent eux mêmes en deux catégories :
 - les filtres passifs qui font appels essentiellement à des inductances de haute qualité et des condensateurs. Ils sont actuellement utilisés pour les hautes fréquences (utilisation de quartz)
 - les filtres actifs sont constitués de condensateurs, de résistances et d'éléments actifs qui sont essentiellement des Amplificateurs opérationnels (AOP). Ils sont moins encombrants, faciles à concevoir et moins coûteux que les filtres passifs mais restent limités en fréquence (< 1MHz à cause de l'AOP). Ils consomment plus et nécessitent une source d'alimentation.

TYPE	COMPOSANTS	SPECIFITES
Filtre numérique	Circuits logiques intégrés	▪ Signaux numérisés ▪ $F < 100\text{MHz}$ ▪ convient en grande série ▪ entièrement programmable
Filtres passifs	Circuit discret L et C, Composants piézoélectriques (quartz)	▪ Fréquence élevée ▪ pas d'alimentation ▪ non intégrable
Filtres actifs	AOP, R et C	▪ $F < 1\text{ MHz}$ ▪ besoin d'alimentation ▪ tension filtrée faible $< 15\text{V}$

3. Fonction de Transfert d'un Système

3.1. Equation différentielle



- Loi des mailles:
$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t) \quad (1)$$

$\tau = RC$: constante du temps du système

- L'équation (1) est appelé **équation différentielle du circuit RC**.
- C'est une relation mathématique entre l'entrée et la sortie.
- Elle représente le **modèle temporel du circuit**

3.2. Transformée de Laplace

- Transformée de Laplace: permet un passage du domaine temporel au domaine fréquentiel.

$$L(x(t)) = X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt$$

p : opérateur de Laplace

$x(t)$ supposée nulle pour $t < 0$

- Son inverse s'écrit:

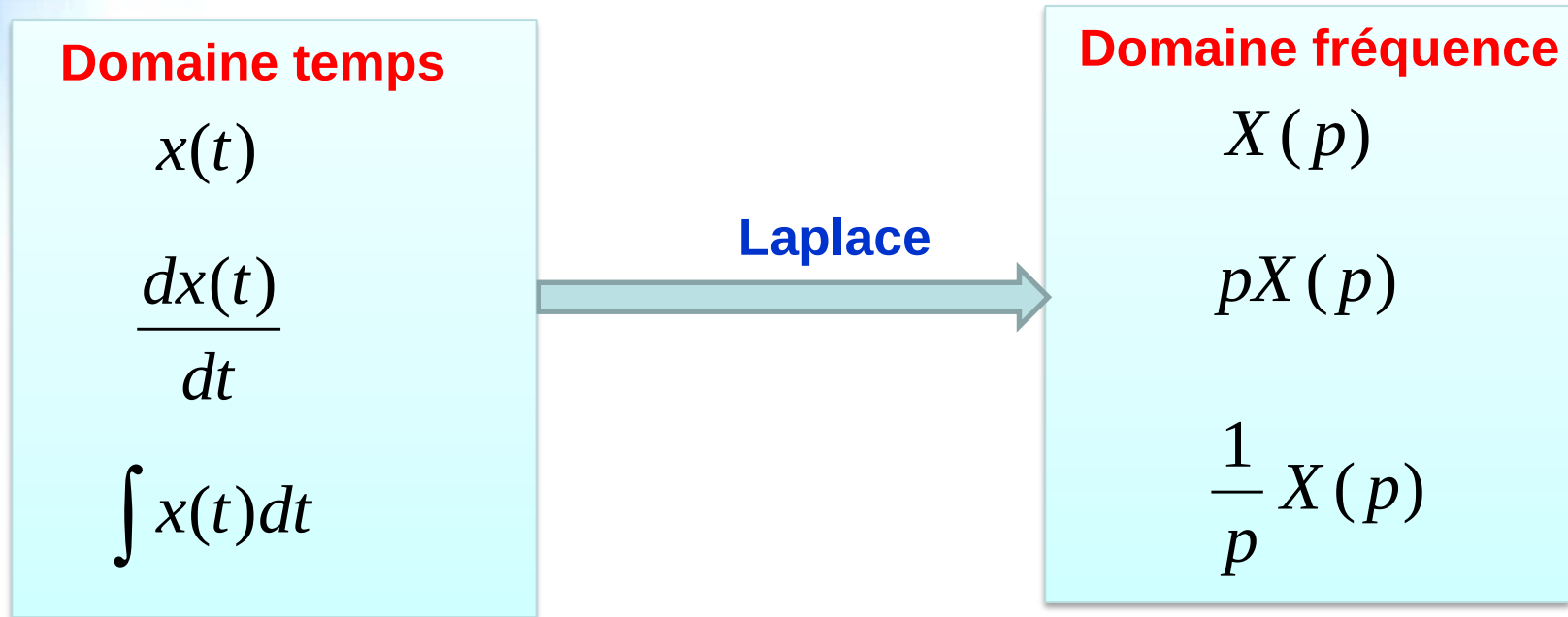
$$x(t) = L^{-1}(X(p)) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{\alpha - j\beta}^{\alpha + j\beta} (X(p)e^{pt}) dp$$

- ***On utilise souvent des Tables de Transformées de LAPLACE***

$F(p)$	$f(t)$
1	$\delta(t)$
$\frac{1}{p}$	$\Gamma(t)$
$\frac{1}{p^2}$	t
$\frac{1}{p+a}$	e^{-at}
$\frac{a}{p(p+a)}$	$1 - e^{-at}$
$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\sin(\omega t)$
$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\cos(\omega t)$
$\frac{1}{p(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)}$	$1 - \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2})$
$\frac{1}{p(p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2)} \quad \xi < 1$	$\frac{1}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{\omega_0}{\omega} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega t + \varphi) \right)$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad \varphi = \arccos(\xi)$

3.3. Fonction de transfert

- Pour les conditions initiales nulles on a:



- Application sur l'équation (1) du circuit:

Domaine temps

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

Laplace

Domaine fréquence

$$\tau p Y(p) + Y(p) = U(p)$$

$$(1 + \tau p) Y(p) = U(p)$$

$$\frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

- On appelle fonction de transfert le rapport : $G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)}$

- Pour le circuit RC:

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{1}{1 + \tau p}$$

C'est un système de premier ordre

4. Les Filtres passe-bas

4.1. Filtres passe-bas du premier ordre

a) *Fonction de transfert:* *Transmittance fréquentielle:*

$$H(p) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{H_0}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

$$p = j\omega$$

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Avec H_0 une constante (gain statique) et ω_c la pulsation de coupure à -3dB. La fonction de transfert dépend de la fréquence
($\omega = 2\pi f$)

b) Diagramme de bode: Représentation graphique de $H(j\omega)$ en échelle logarithmique: On l'appelle aussi « lieu de transfert de $H(j\omega)$ »

La transmittance $H(j\omega)$ est un nombre complexe, elle a donc un module et un argument

1. Module (en dB: décibel):

$$L(\omega) = 20 \log |H(j\omega)| = 20 \log \left| \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right|$$

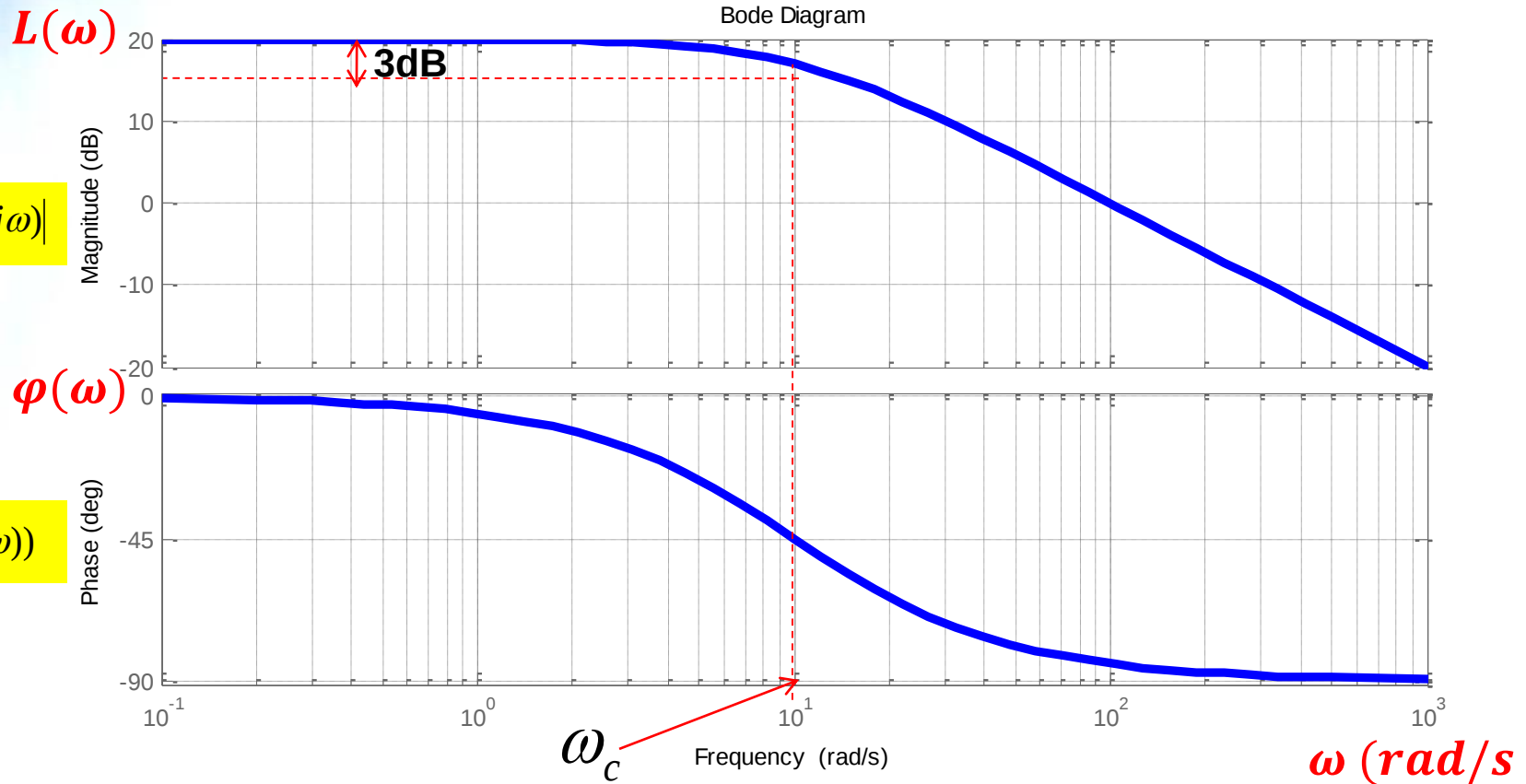
2. Argument (en degré):

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg(H(j\omega)) = \arg(H_0) - \arg\left(1 + j \frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ &= -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \end{aligned}$$

b) Diagramme de bode:

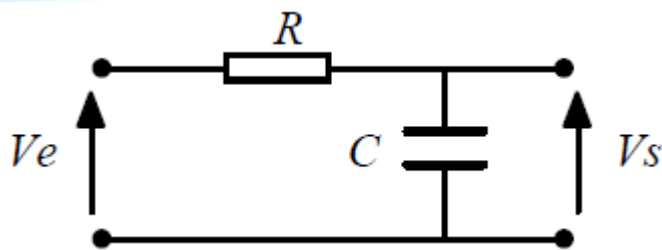
$$H_0 = 10$$

$$\omega_c = 10 \text{ rad/s}$$



c) Réalisation:

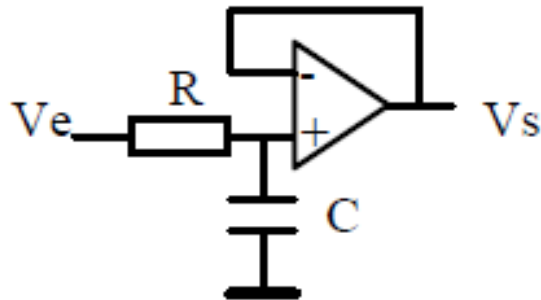
Réalisation par un filtre passif



$$H(j\omega) = \frac{V_s}{V_e} = \frac{H_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

Réalisation par un filtre actif



$$H_0 = 1 \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

4.2. Filtre passe bas du deuxième ordre

a) Fonction de transfert:

$$H(p) = \frac{H_0}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

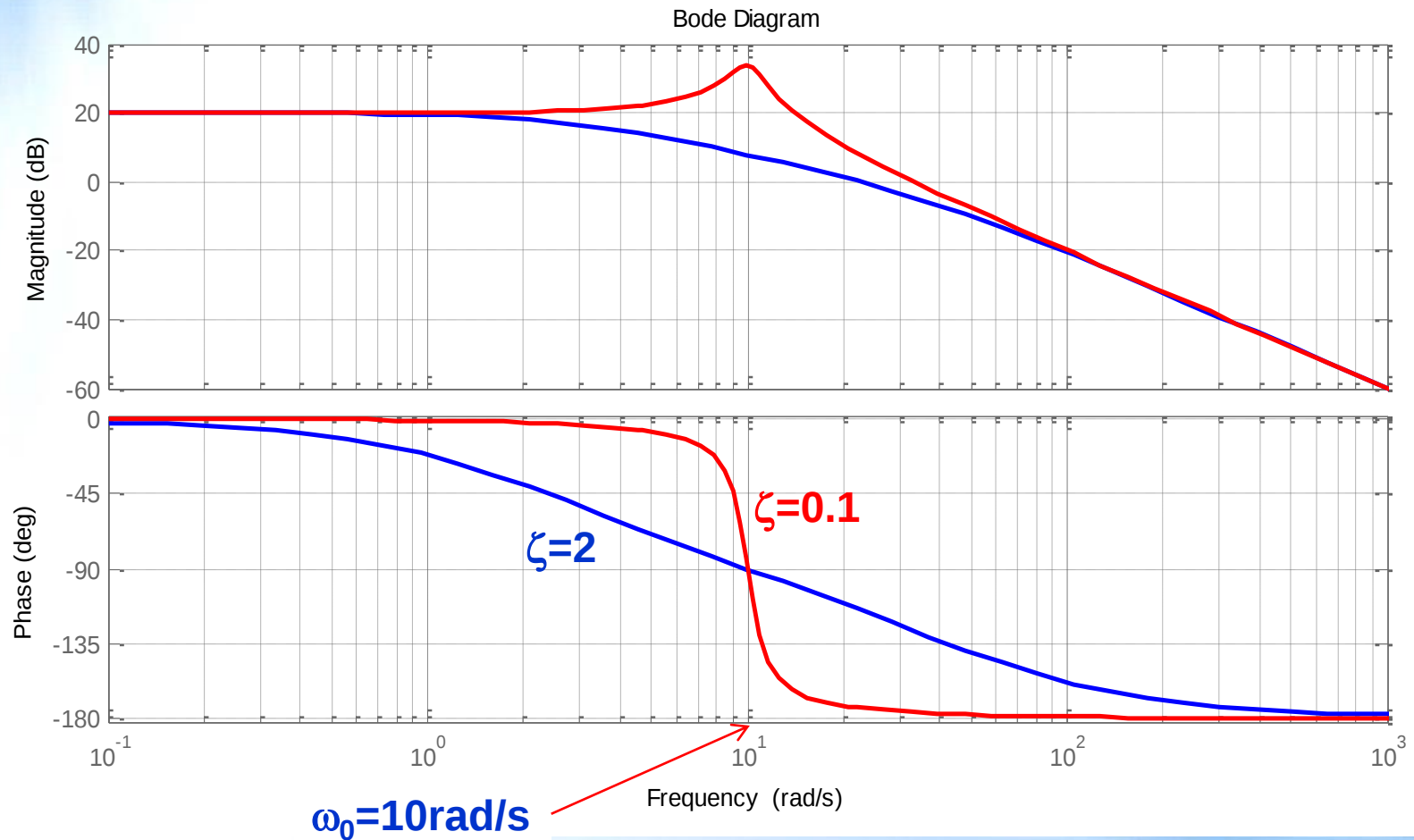
$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

ζ : le coefficient d'amortissement

ω_0 : la pulsation propre

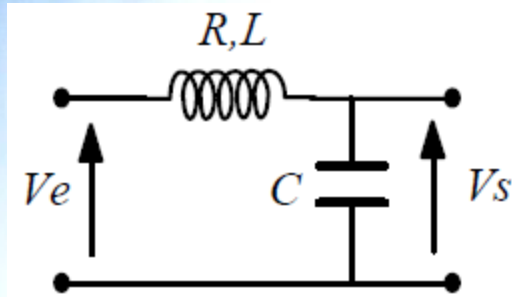
b) Diagramme de bode:

$H_0=10$



c) Réalisation:

Réalisation par un filtre passif

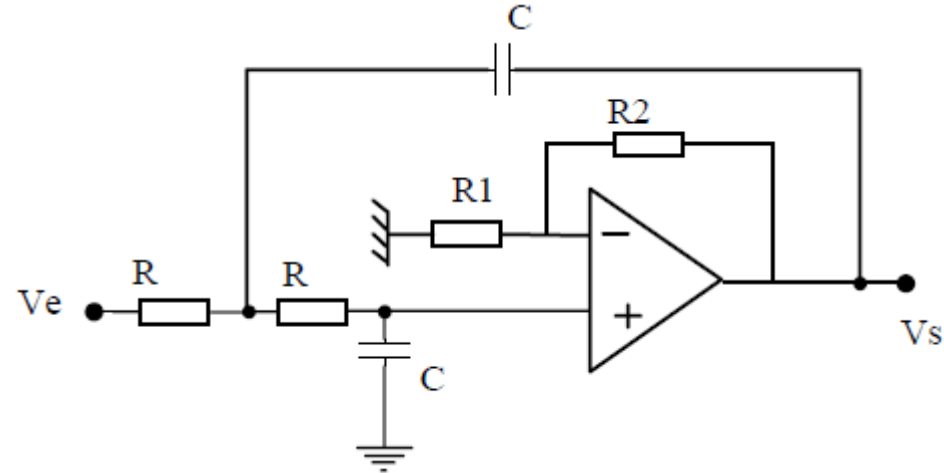


$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Réalisation par un filtre actif



Structure passe-bas de **Salen-Key**

$$H(j\omega) = \frac{H_0}{1 + j(3 - H_0)RC\omega - (RC\omega)^2}$$

$$H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}(3 - H_0)$$

5. Les Filtre passe-haut

5.1. Filtres passe-haut du premier ordre

a) *Fonction de transfert:*

$$H(p) = H_0 \frac{\frac{p}{\omega_c}}{1 + \frac{p}{\omega_c}}$$

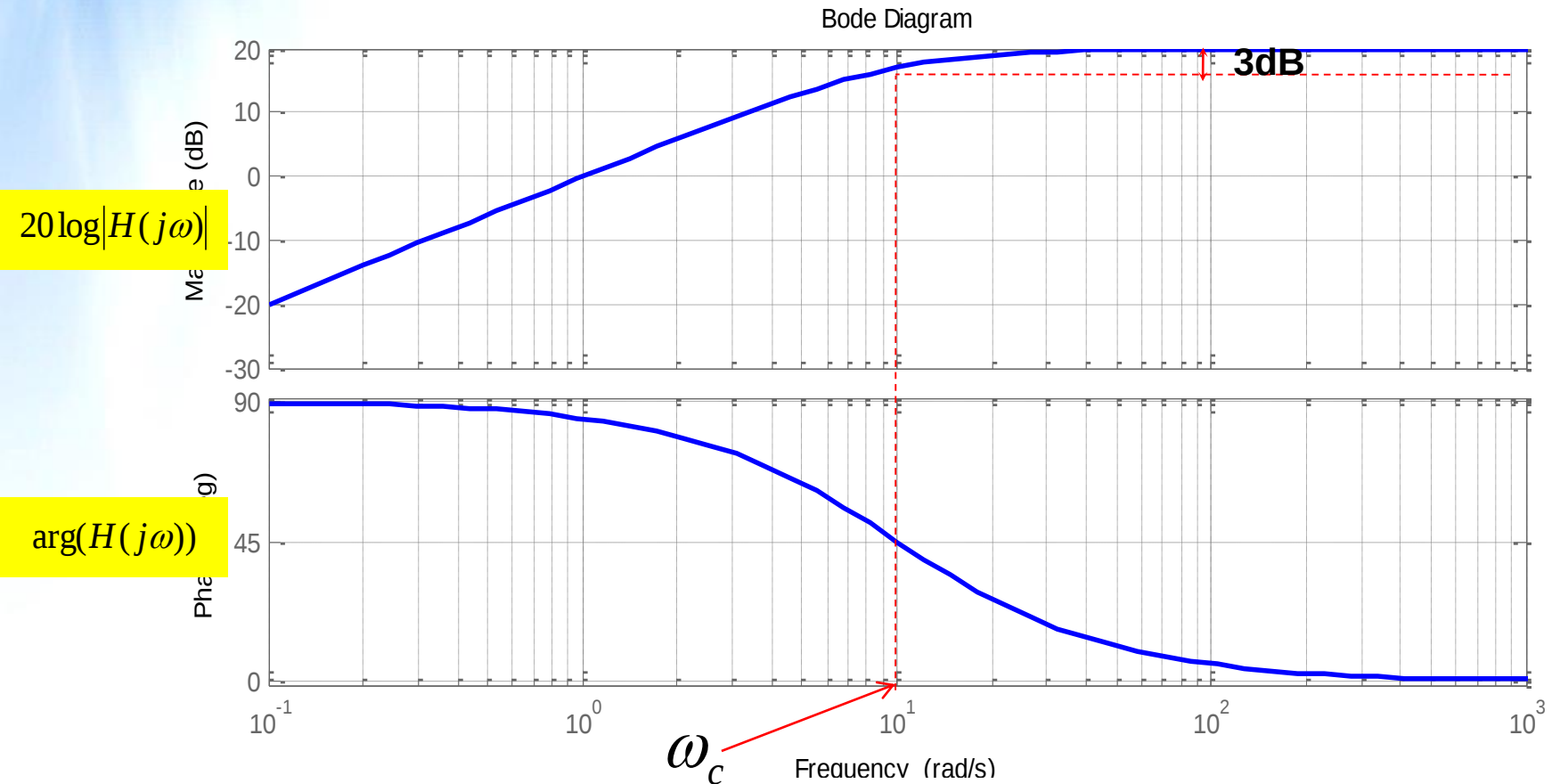
$$H(j\omega) = H_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

H_0 : constante du gain

ω_c la pulsation de coupure à -3dB.

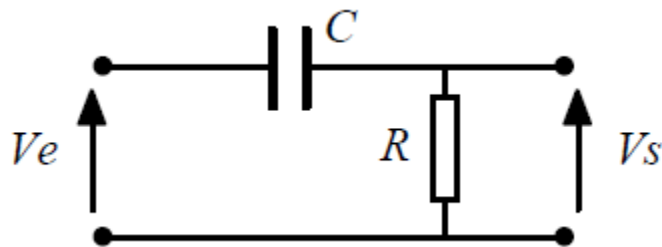
b) Diagramme de bode:

$H_0=10$



c) Réalisation:

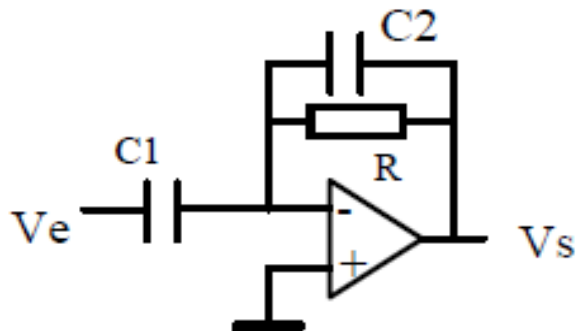
Réalisation par un filtre passif



$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$H_0 = 1 \quad \omega_c = \frac{1}{RC} \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

Réalisation par un filtre actif



$$H(j\omega) = -\frac{jRC_1\omega}{1 + jRC_2\omega}$$

$$H_0 = -\frac{C_1}{C_2} \quad \omega_c = \frac{1}{RC_2} \quad f_c = \frac{1}{2\pi RC_2}$$

5.2. Filtre passe haut du deuxième ordre

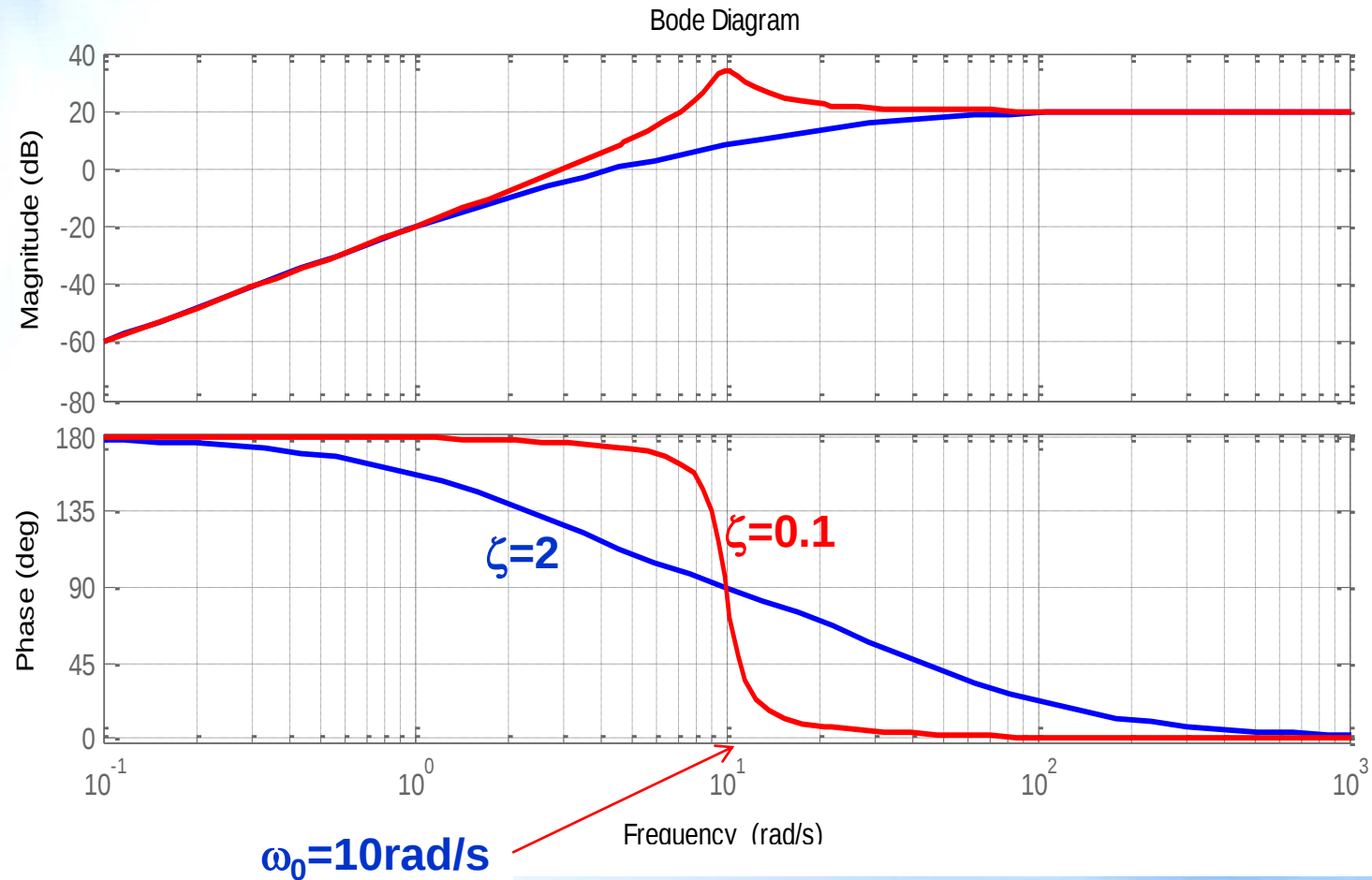
a) Fonction de transfert:

$$H(p) = H_0 \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(j\omega) = -H_0 \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

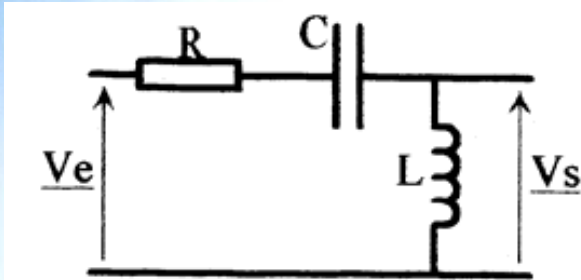
b) Diagramme de bode:

$H_0=10$



c) Réalisation:

Réalisation par un filtre passif

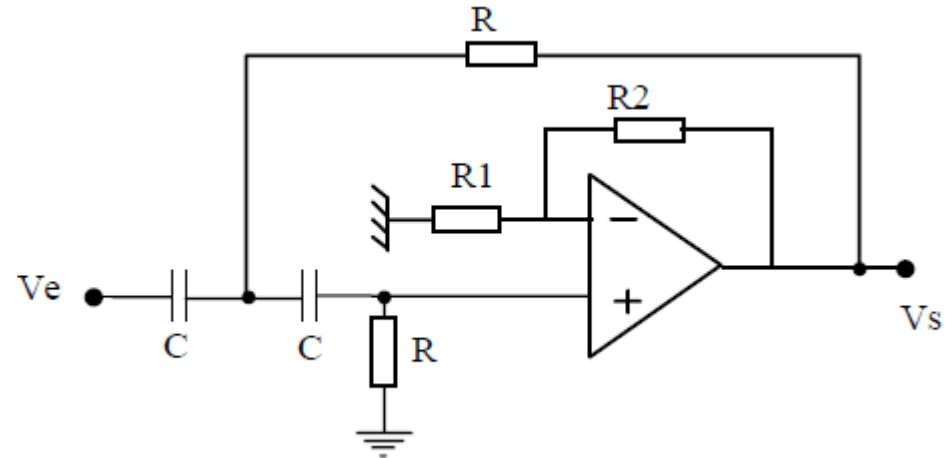


$$H(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Réalisation par un filtre actif



Structure passe-haut de **Salen-Key**

$$H(j\omega) = \frac{-H_0(RC\omega)^2}{1 + j(3 - H_0)RC\omega - (RC\omega)^2}$$

$$H_0 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\zeta = \frac{1}{2}(3 - H_0)$$

6. Le filtre passe-bande

a) *Fonction de transfert:*

$$H(p) = H_0 \frac{2\zeta \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

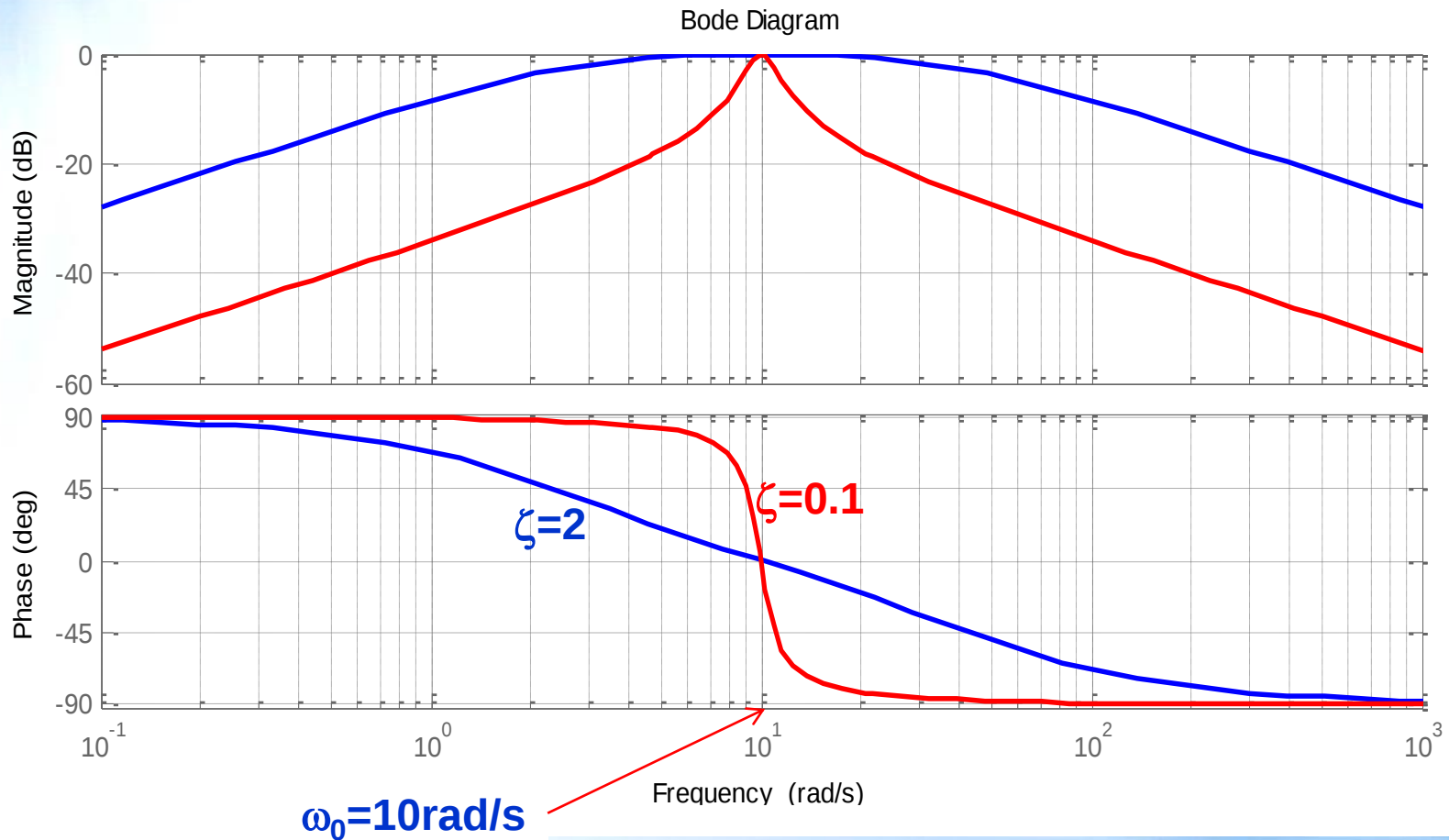
$$H(j\omega) = H_0 \frac{j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

b) Caractéristiques:

- Bande passante à -3dB: $\Delta f = f_2 - f_1$ ($\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi\Delta f$)
- Coefficient de qualité: $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{1}{2\zeta}$
- Gain maximum: $H(\omega_0) = H_0$
- Les fréquences f_1 , f_2 et f_0 sont liées par la relation: $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$

c) Diagramme de bode:

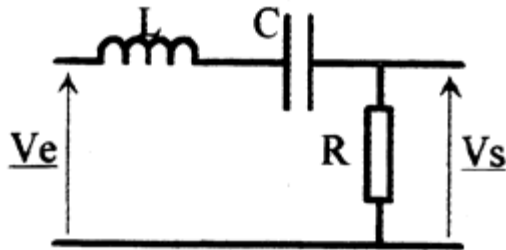
$$H_0=1$$



d) Réalisation:

Réalisation par filtres passifs

RLC

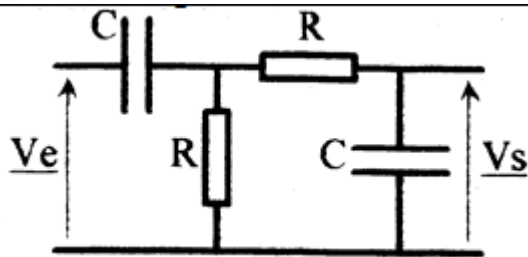


$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

$$H_0 = 1 \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

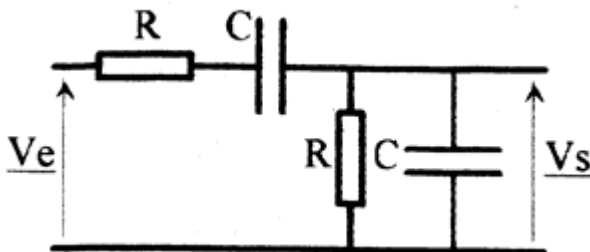
CR-RC



$$H(j\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2}$$

$$H_0 = \frac{1}{3} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

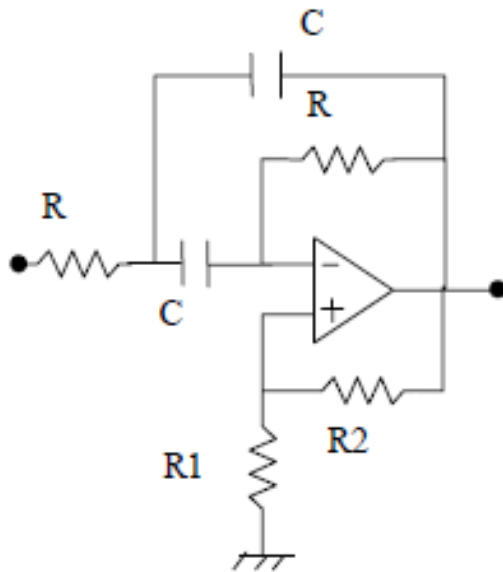
Pont de Wien



$$\zeta = \frac{3}{2}$$

Réalisation par un filtre actif

Ces filtres peuvent être réalisés à l'aide de plusieurs structures à AOP: structure de **Rauch**, structure de **Salen-Key**, structure de **Delyiannis**.



structure de Delyiannis

$$H(j\omega) = \frac{-j \frac{k}{k-1} RC\omega}{1 + j(2k-3) \frac{1}{k-1} RC\omega - (RC\omega)^2}$$

$$k = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$H_0 = -\frac{k}{2k-3}$$

$$\zeta = 1 - \frac{R_1}{2R_2}$$

$$\frac{\Delta f}{f_0} = 2 - \frac{R_1}{R_2}$$

7. Le filtre réjecteur de bande

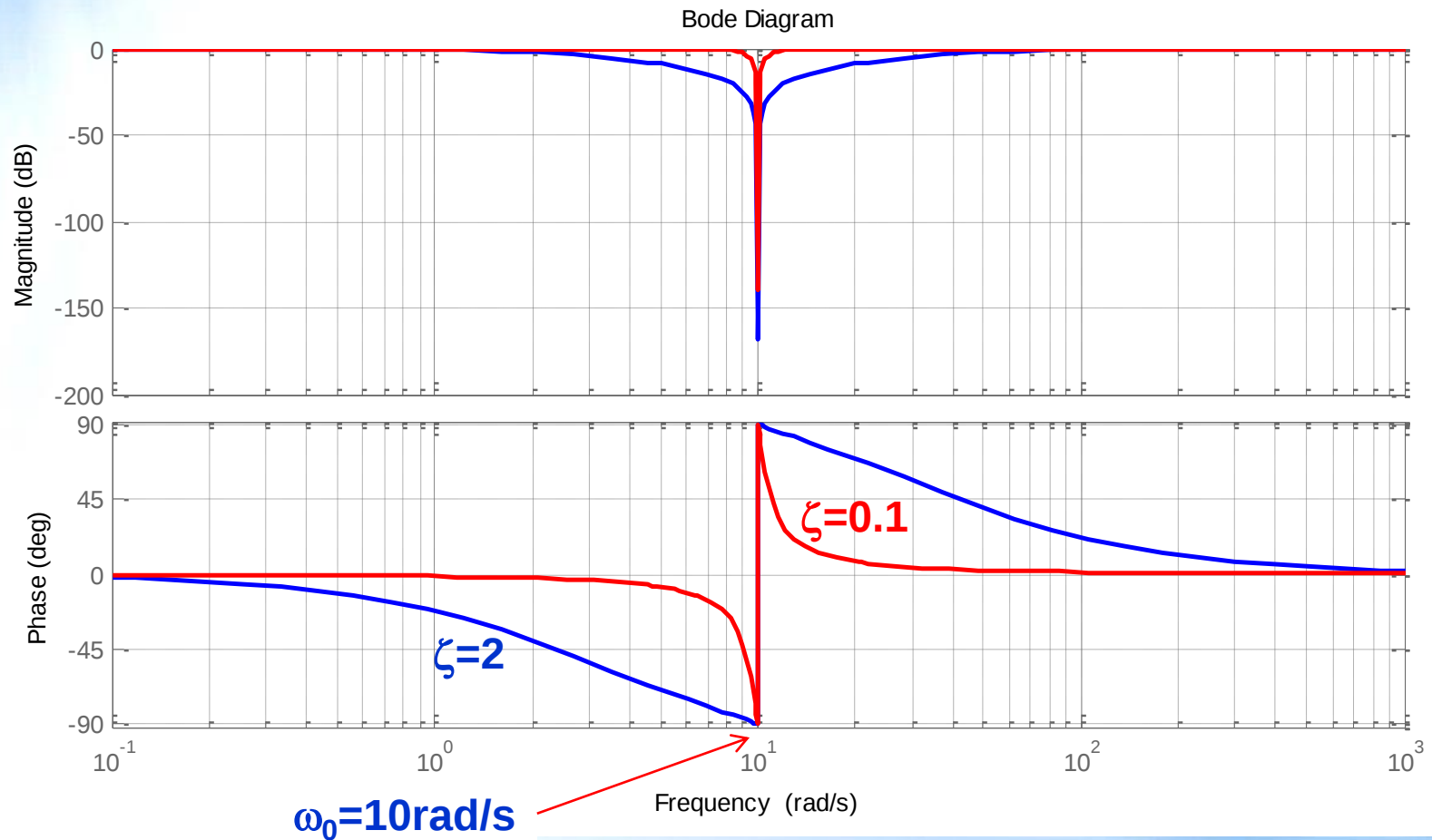
a) *Fonction de transfert:*

$$H(p) = H_0 \frac{1 + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$H(j\omega) = H_0 \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

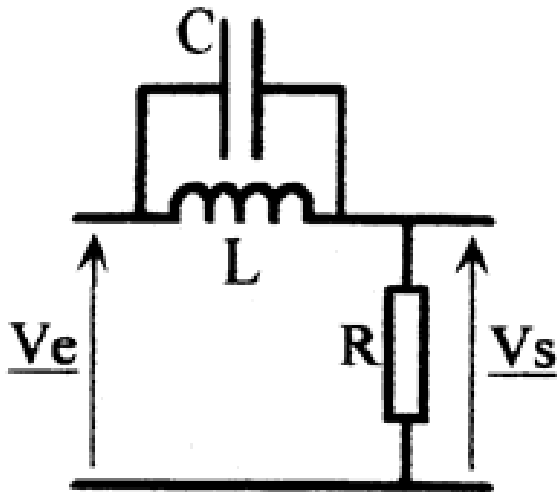
b) Diagramme de bode:

$$H_0=1$$



c) Réalisation:

Réalisation par un filtre passif: le circuit bouchon



$$H(j\omega) = \frac{1 - LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

$$H_0 = 1$$

$$\zeta = \frac{1}{2R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

8. Applications avec Matlab/Simulink

Application 1: Diagramme de bode des filtres:

- Elaborer un script Matlab qui permet de tracer le diagramme de bode de deux filtres de fonctions de transferts suivantes. En déduire la pulsation de coupure de chaque filtre.

$$H_1(p) = \frac{H_{01}}{1 + \tau p}$$

$$H_{01} = 10$$

$$\tau = 10^{-3}$$

$$H_2(p) = \frac{H_{02}}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_n} + \frac{p^2}{\omega_n^2}}$$

$$H_{02} = 1$$

$$\zeta = 2 \text{ puis } \zeta = 0.2$$

$$\omega_n = 5 \times 10^3$$

Script Matlab

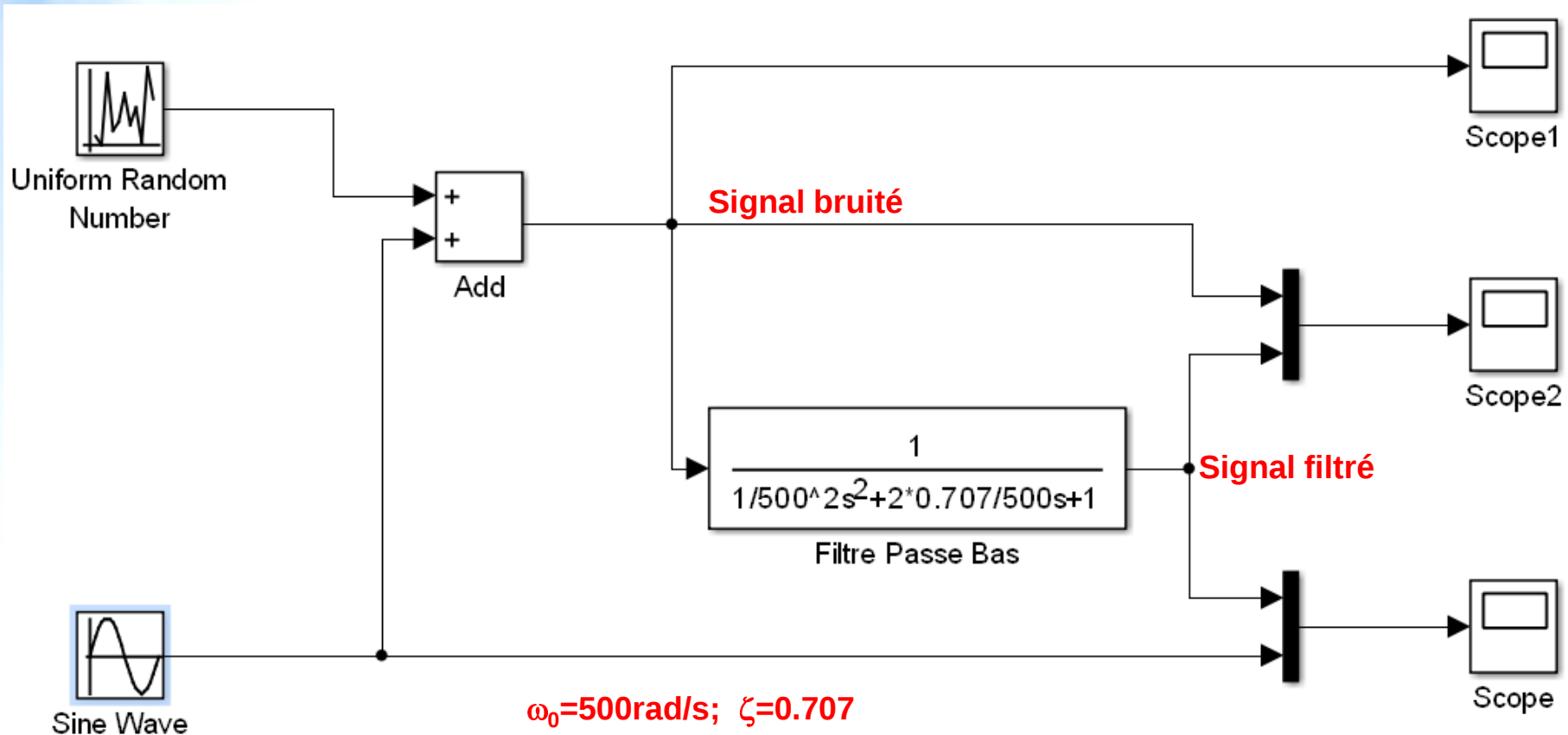
```

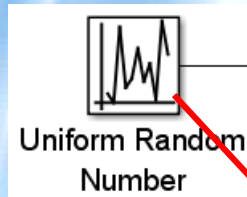
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  DIAGRAMME DE BODE DES FILTRES  %%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear;
clc;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  Filtre Passe bas du premier ordre  %%%%%%%%%
tau=1e-3;
H01=10;
H1p=tf(H01,[tau 1]);
figure(1)
bode(H1p);
grid
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  Filtre Passe bas de second ordre  %%%%%%%%%
H02=1;
wn=5e3;
zeta1=2;
zeta2=0.2;
H2p_1=tf(H02,[1/wn^2 2*zeta1/wn 1]);
H2p_2=tf(H02,[1/wn^2 2*zeta2/wn 1]);
figure(2)
bode(H2p_1);
hold on
bode(H2p_2)
grid

```

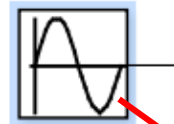
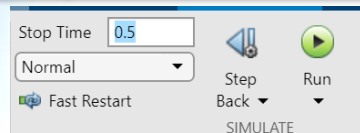
Application 2: filtrage du bruit de mesure:

- En utilisant Matlab/Simulink, simuler le filtrage d'un bruit de mesure en utilisant un filtre passe bas.

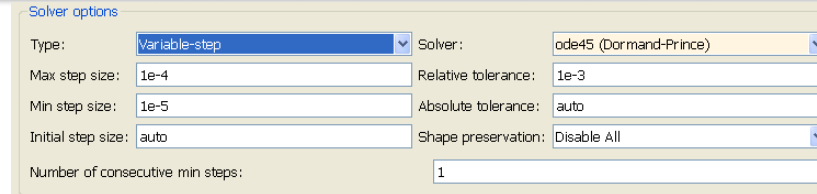




Uniform Random Number



Sine Wave



Source Block Parameters: Uniform Random Number

Uniform Random Number

Output a uniformly distributed random signal. Output is repeatable for a given seed.

Parameters

Minimum:
-2

Maximum:
2

Seed:
0

Sample time:
0.0001

☒ Interpret vector parameters as 1-D

OK Cancel Help Apply

Parameters

Sine type: Time based

Time (t): Use simulation time

Amplitude:
10

Bias:
0

Frequency (rad/sec):
100

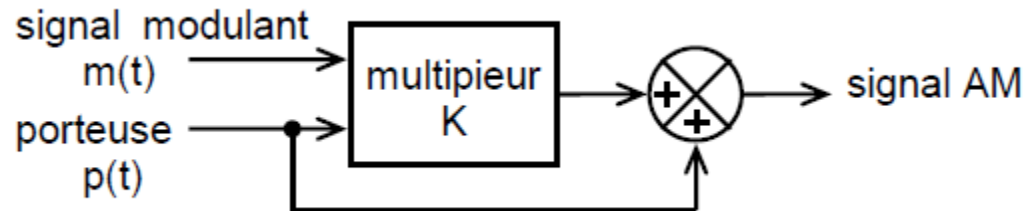
Phase (rad):
0

Sample time:
0

☒ Interpret vector parameters as 1-D

Application 3: réalisation d'une démodulation d'amplitude

Un signal modulé en amplitude $v(t)$ peut être obtenu à l'aide d'un multiplieur et d'un sommateur



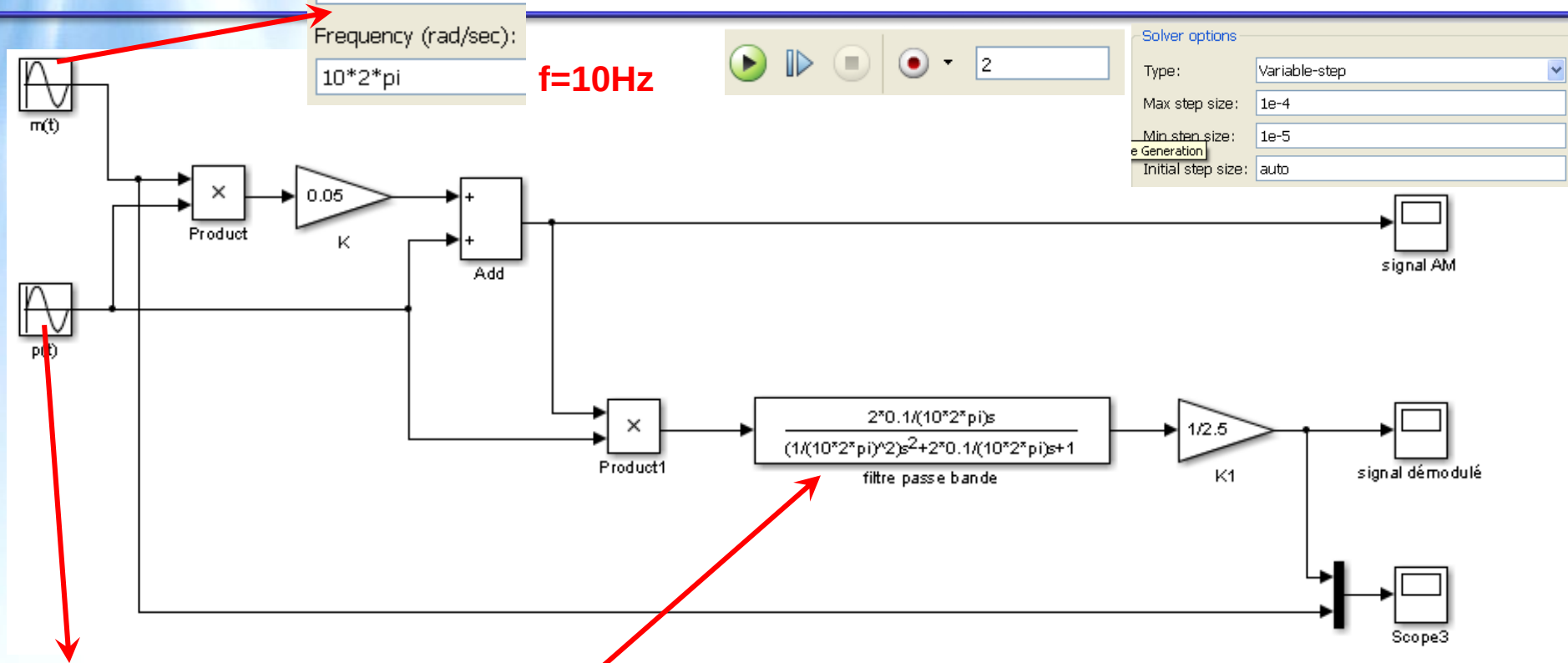
le signal modulé $v(t)$ peut s'écrire alors comme suit

$$v(t) = (1 + Km(t)).p(t)$$

$p(t)$ est la porteuse. C'est un signal sinusoïdal: $p(t) = A_1 \cos(2\pi F_0 t)$

F_0 : Fréquence de la porteuse. $m(t)$ signal modulant: en radio le signal modulant est la parole ou la musique.

A l'aide de Simulink, réaliser le montage de modulation et celui de démodulation AM.



Amplitude: 10
Bias: 0
Frequency (rad/sec): $1e3 \cdot 2 \cdot \pi$ **F₀=1000Hz**

$$H(p) = \frac{2\zeta \frac{p}{\omega_0}}{1 + 2\zeta \frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\omega_0 = 2\pi \times 10$$

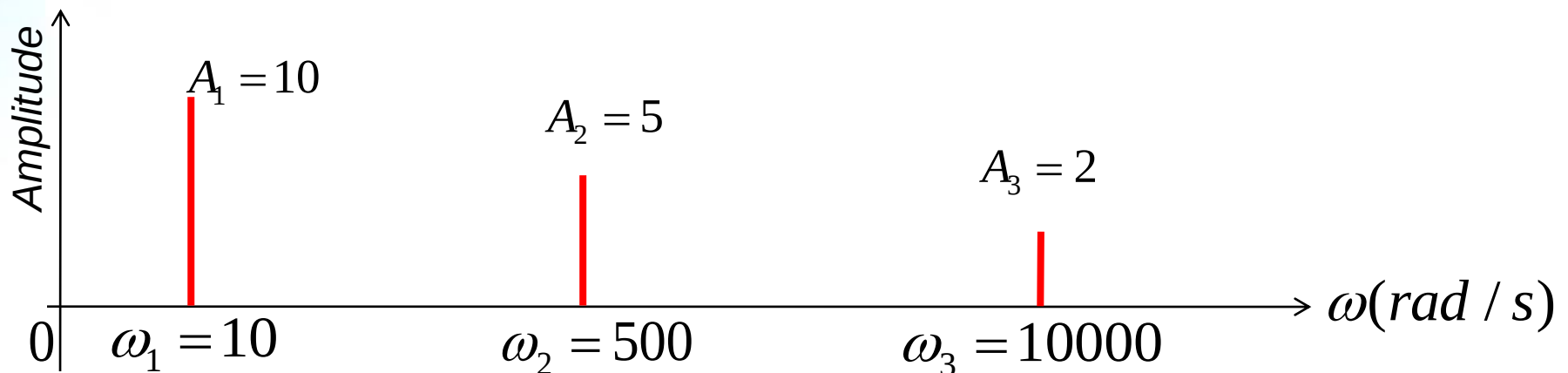
$$\zeta = 0.1$$

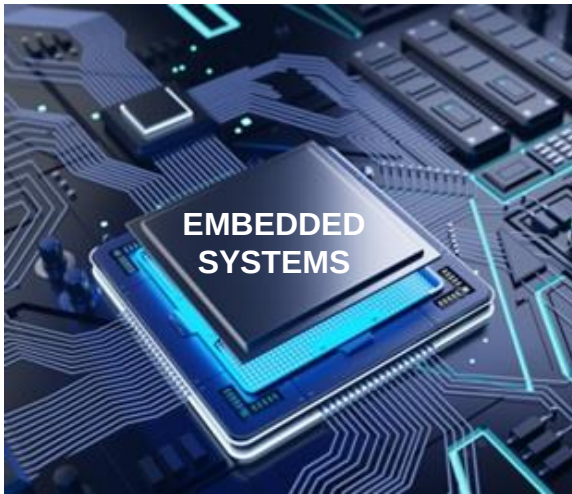
Application 4: récupération des signaux utiles

- Soit un signal dont le spectre unilatéral est représenté ci-dessous (mélange de trois signaux sinusoïdaux)
1. A l'aide de Simulink, réaliser un montage permettant de générer le signal $s(t)$.
 2. À l'aide d'un filtre passe bande, récupérer, à partir du signal $s(t)$, le signal de pulsation ω_2 .

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$$

$$s_k(t) = A_k \sin(\omega_k t) \quad k=1,2,3$$





FIN !
Questions ?