

# الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة	العامية	الموضوع	2025
NS	للسنة	Y**	24F

الرياضيات

## شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)

الصفحة 1	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا الدورة العادية 2025 -الموضوع -	+٢٣٥٤٠٤٤٨٨٥٦   +٢٣٥٤٠٤٧٥٣٠٦   +٢٣٥٤٠٤٧٥٣٠٨ الملكة المغربية وزارة التربية الوطنية و التعليم الأولي والرياضة المركز الوطني لامتحانات المدرسيّة وتقدير التعلمات
٥		
٧**		

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية)	الشعبة المسماة

## **CONSIGNES :**

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
  - L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.
  - Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

**- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse .....(10 pts)**

**- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....(3.5 pts)**

**- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique .....(3 pts)**

**- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)**

## **L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé**

**L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé**

**EXERCICE1 : (10 points)**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + e}$

et soit  $(\Gamma)$  sa courbe représentative dans un repère **orthogonal**  $(O; \vec{i}, \vec{j})$

**Partie I :**

0.25 1- a) Montrer que:  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(1-x) = f(x)$

0.25 b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.5 c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  puis en déduire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

0.5 d) Interpréter graphiquement les deux résultats obtenus.

0.5 2- a) Montrer que:  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = f(x) \frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}$

b) Donner les variations de  $f$  puis en déduire que :

1  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 0 < f(x) < \frac{1}{2}$

0.5 3- Représenter graphiquement la courbe  $(\Gamma)$ .

(On prendra  $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ ,  $\|\vec{j}\| = 2\text{cm}$  et  $\frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0.30$  et  $\frac{1}{1+e} \approx 0.27$ )

0.5 4- a) Montrer que:  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx$

0.25 b) En déduire que  $\int_0^1 f(x) dx = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$

0.25 5- a) En effectuant le changement de variables :  $t = e^x$ , montrer que :

0.25  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2 + e}$

0.5 b) Montrer que :  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{e}} \left( \arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4} \right)$

0.25 c) En déduire l'aire, en  $\text{cm}^2$ , du domaine plan délimité par  $(\Gamma)$ , les droites d'équations respectives :  $x = 0$ ,  $x = 1$  et  $y = 0$

**Partie II :**

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $u_0 \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 1- En utilisant le résultat de la question I.2-a), montrer que :

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; |f'(x)| \leq f(x)$

0.5 2- a) Montrer que :  $\left(\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]\right) ; 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$

- 0.25 b) Montrer que la fonction  $g: x \mapsto g(x) = f(x) - x$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$
- 0.5 c) En déduire qu'il existe un unique réel  $\alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$  tel que :  $f(\alpha) = \alpha$
- 0.5 3- a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < \frac{1}{2}$
- 0.5 b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$
- 0.5 c) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$
- 0.25 d) En déduire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$

**Partie III :**

On considère la suite numérique  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{e^{\frac{k}{n}} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

- 0.25 1-a) Vérifier que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$
- 0.5 b) Montrer que :  $\int_0^1 x f(x) dx = \int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$   
(On pourra effectuer le changement de variables :  $t = 1 - x$ )
- 0.5 2- Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

**EXERCICE2 : (3.5 points)**

Soit  $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E_\alpha)$  d'inconnue  $z$ :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1+2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

**Partie I :**

- 0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation  $(E_\alpha)$  est :  $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1-2i))^2$
- 0.5 b) En déduire les deux solutions  $a$  et  $b$  de l'équation  $(E_\alpha)$  avec  $|a| < |b|$
- 0.25 2- Vérifier que  $\frac{b}{a}$  est un imaginaire pur.

**Partie II :**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On note par  $M(z)$  le point d'affixe le nombre complexe  $z$

On pose  $\frac{b}{a} = \lambda i$  avec  $\lambda = \operatorname{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

1- On considère les points  $A(a)$ ,  $B(b)$  et  $H(h)$  avec  $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

0.5 a) Montrer que :  $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$  puis en déduire que les droites  $(OH)$  et  $(AB)$  sont perpendiculaires.

0.5 b) Montrer que :  $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$  puis en déduire que les points  $H, A$  et  $B$  sont alignés.

2- Soient  $I(m)$  le milieu du segment  $[OH]$  et  $J(n)$  le milieu du segment  $[HB]$

0.5 a) Montrer que :  $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$

0.5 b) En déduire que les droites  $(OJ)$  et  $(AI)$  sont perpendiculaires et que  $OJ = |\lambda| AI$

0.25 c) Soit  $K$  le point d'intersection des droites  $(OJ)$  et  $(AI)$

Montrer que les points  $K, I, H$  et  $J$  sont cocycliques.

0.25 d) Montrer que les droites  $(IJ)$  et  $(OA)$  sont perpendiculaires.

**EXERCICE3 : (3 points)**

Soient  $p$  un nombre premier impair et  $a$  un entier premier avec  $p$

0.5 1- Montrer que  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$  ou  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

2- On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation :  $ax^2 \equiv 1 \pmod{p}$ . Soit  $x_0$  une solution de cette équation.

0.5 a) Montrer que :  $x_0^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

0.25 b) En déduire que :  $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

3- Soit  $n$  un entier naturel non nul.

0.5 a) Montrer que si  $p$  divise  $2^{2n+1} - 1$  alors  $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

0.5 b) En déduire que l'équation  $(E)$  :  $11x + (2^{2n+1} - 1)y = 1$  admet au moins une solution dans  $\mathbb{Z}^2$

4- On considère dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(F)$  :  $x^2 + 5x + 2 \equiv 0 \pmod{11}$

0.25 a) Montrer que :  $(F) \Leftrightarrow 2(2x+5)^2 \equiv 1 \pmod{11}$

0.5 b) En déduire que l'équation  $(F)$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{Z}$

**EXERCICE4 : (3.5 points)**

On rappelle que  $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$  est un anneau unitaire et non commutatif de zéro la

matrice  $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  et d'unité la matrice  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , et que  $(M_3(\mathbb{R}), +, .)$  est

un espace vectoriel réel.

Soient la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  et l'ensemble  $E = \{M(x) = I + xA / x \in \mathbb{R}\}$

0.25 1- a) Vérifier que :  $A^2 = -2A$

0.25 b) En déduire que :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) \times M(y) = M(x + y - 2xy)$

0.25 2- a) Calculer  $M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

0.25 b) En déduire que la matrice  $M\left(\frac{1}{2}\right)$  n'est pas inversible dans  $(M_3(\mathbb{R}), \times)$

0.25 3- Montrer que :  $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$  est stable pour la multiplication dans  $M_3(\mathbb{R})$

(on pourra utiliser l'identité :  $\left(x - \frac{1}{2}\right) \left(y - \frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{2} \left(x + y - 2xy - \frac{1}{2}\right)$ )

1 4- Montrer que :  $\left(E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$  est un groupe commutatif.

5- On munit  $E$  de la loi de composition interne  $T$  définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; M(x) T M(y) = M\left(x + y - \frac{1}{2}\right)$$

et on considère l'application  $\varphi$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $E$  par :  $\forall x \in \mathbb{R} ; \varphi(x) = M\left(\frac{1-x}{2}\right)$

0.5 a) Montrer que  $\varphi$  est un homomorphisme de  $(\mathbb{R}, +)$  vers  $(E, T)$  et que  $\varphi(\mathbb{R}) = E$

0.25 b) En déduire que  $(E, T)$  est un groupe commutatif.

0.5 6- Montrer que  $(E, T, \times)$  est un corps commutatif.