Nota : j'ai laissé mes quelques réflexions infructueuses pour montrer le cheminement logique effectué.

Bac Maroc 2025 :

E1

$f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+e} \end{pmatrix}$ de courbe (Γ)

Partie I

1.a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f(1-x) = \frac{e^{1-x}}{e^{2(1-x)}+e} = \frac{e^x(e^{1-2x})}{e^{2-2x}+e}$$

$$f(1-x) = \frac{e^x(e^{1-2x})}{e^{1-2x}\left(e+\frac{e^1}{e^{1-2x}}\right)} = \frac{e^x}{e+e^{1-(1-2x)}} = \frac{e^x}{e+e^{2x}}$$

donc $\boxed{f(1-x) = f(x)}$

1.b) (Γ) est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

1.c) $\begin{cases} e^x \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0^+ \\ e^{2x}+e \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} e \end{cases}$ Par quotient : $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+}$

Par symétrie axiale, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+}$ (peut aussi se retrouver par calcul direct)

1.d) (Γ) admet une asymptote horizontale en $\pm\infty$ d'équation $y=0$ (axe des abscisses)

2.a) On a $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'une part :

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}+e) - e^x(2e^{2x})}{(e^{2x}+e)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{3x}+e^{x+1}-2e^{3x}}{e^{4x}+2e^{2x+1}+e^2} = \frac{e^{x+1}-e^{3x}}{e^{4x}+2e^{2x+1}+e^2}$$

D'autre part :

$$f(x)\left[\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right]=\left(\frac{e^{x}}{e^{2x}+e}\right)\left(\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right)$$

$$=\frac{e^{x}-e^{3x-1}}{e^{2x}+e^{4x-1}+e+e^{2x}}$$

$$=\frac{e^{x}-e^{3x-1}}{2e^{2x}+e^{4x-1}+e}$$

$$=\frac{e\left(e^{x}-e^{3x-1}\right)}{e\left(2e^{2x}+e^{4x-1}+e\right)}$$

$$=\frac{e^{x+1}-e^{3x}}{e^{4x}+2e^{2x+1}+e^{2}}$$

On a bien $\boxed{f'(x)=f(x)\left[\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right]}$

2. b) Soit $x\in\mathbb{R}$. On a $f(x)>0$ et $1+e^{2x-1}>0$.

f' est du signe de $1-e^{2x-1}$.

$1-e^{2x-1}>0$

$\Leftrightarrow 1>e^{2x-1}$

$\Leftrightarrow 0>2x-1$ (stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$ et stricte croissance de exp sur $\mathbb{R}$)

$\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de f'		$+$	0	$-$	
Variations de f	0^+	$\nearrow$	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	$\searrow$	0^+

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{1/2}}{e^1 + e} = \frac{\sqrt{e}}{2e} = \frac{\sqrt{e}}{2\sqrt{e}\sqrt{e}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

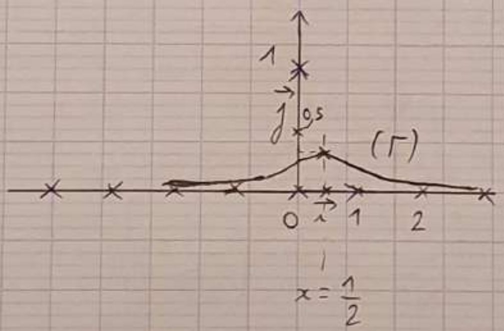
D'après le tableau de variations :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 < f(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2} \qquad (\sqrt{e} > 1)$$

donc $\quad 0 < f(x) < \frac{1}{2}$.

3) $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \approx 0,30$

$f(0) = f(1) = \frac{1}{1+e} \approx 0,27$



4. a) Le résultat est évident par symétrie.

$u = 1-x$; $du = -dx$

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_1^{1/2} f(1-u)(-du) = \int_{1/2}^1 f(1-u)\,du$$

$$= \int_{1/2}^1 f(u)\,du \quad (\text{d'après } 1.a)$$

$$= \int_{1/2}^1 f(x)\,dx.$$

4.b) D'après 4.a) et la relation de Chasles :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^1 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_0^{1/2} f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^{1/2} f(x)\,dx$$

5.a) Posons $t = e^x$. Alors $dt = e^x\,dx = t\,dx$.

$$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_0^{1/2} \frac{e^x}{e^{2x}+e}\,dx$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{t}{t^2+e}\left(\frac{dt}{t}\right) \qquad (e^0 = 1 \ ; \ e^{1/2} = \sqrt{e})$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}.$$

5.b) $$\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+e}$$

$$= \int_1^{\sqrt{e}} \frac{dt}{t^2+\sqrt{e}^2}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{e}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{e}}\right)\right]_1^{\sqrt{e}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan(1) - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\right]$$

Il est classique de montrer : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ (par dérivation par exemple).

Donc $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\sqrt{e})\right)\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4}\right] \text{. CQFD.}$$

5. c) L'aire vaut par définition $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$.

D'après les questions précédentes, on trouve :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{2}{\sqrt{e}}\left[\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4}\right].$$

Partie II

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0 ; \frac{1}{2}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$|f'(x)| = \left| f(x)\left(\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right)\right|$$

$$= |f(x)|\left|\frac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right| \qquad (f(x) > 0)$$

$$= f(x)\frac{|1-e^{2x-1}|}{1+e^{2x-1}}$$

Il suffit de montrer que $\left|\dfrac{1-e^{2x-1}}{1+e^{2x-1}}\right| \leq 1$

Posons $v = e^{2x-1}$. Quand $x \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}_+^*$.

Étudions $h : \begin{pmatrix} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \dfrac{1-v}{1+v} \end{pmatrix}$

$h \in D^1(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Soit $v > 0$.

$$h'(v) = \frac{-1\,(1+v) - (1-v) \cdot 1}{(1+v)^2}$$

$$h'(v) = \frac{-1 - v - 1 + v}{(1+v)^2}$$

$$h'(v) = \frac{-2}{(1+v)^2} < 0$$

$$\begin{array}{c|ccc}
v & 0 & & +\infty \\
\hline
\text{Variations de } h & 1 & \searrow & -1^{+}
\end{array}$$

En factorisant par v au numérateur et dénominateur pour lever la F.I !

$\forall v \in \mathbb{R}_+^*,\ h(v) \in \left]-1\,;\,1\right[$

donc $|h(v)| < 1$

puis $\left| \dfrac{1 - e^{2x-1}}{1 + e^{2x-1}} \right| < 1$

A fortiori, l'inégalité large est vraie.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq f(x)$.

2. a) On a vu dans la I-2-b ceci :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 < f(x) < \frac{1}{2}$$

De plus, $|f'(x)| \leq f(x)$.

Soit $x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right]$.

On a déjà prouvé $0 \leq f'(x)$ (vrai sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{2}\right]$).

On a $|f'(x)| = f'(x) \leq f(x) < \frac{1}{2}$ donc $f'(x) < \frac{1}{2}$.

donc : $\forall x \in \left[0\,;\,\frac{1}{2}\right],\ 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}$.

2.b) $g : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) - x \end{pmatrix}$

- $g \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
- Soit $x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = f'(x) - 1$

- Si $x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$, $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) \leq -1 < 0$
- Si $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$, $0 < \underbrace{f'(x)}_{=|f'(x)|} \underbrace{\leq f(x)}_{\text{II}-1} \underbrace{< \frac{1}{2}}_{\text{I}-2-b}$

donc $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$

puis $-1 < f'(x) - 1 < -\frac{1}{2} < 0$

Finalement : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2.c) $g(0) = f(0) - 0 = \frac{1}{1+e} > 0$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{e}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{e}} - 1\right)}_{<0} < 0$

g étant continue et strictement décroissante, le théorème de la bijection continue (corollaire du TVI) assure ceci :

$\exists!\, \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $g(\alpha) = 0$

i.e $\exists!\, \alpha \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$, $f(\alpha) = \alpha$.

3. a) Montrons par récurrence la proposition.

I) $u_0 \in]0; \frac{1}{2}[$ par hypothèse

H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < \frac{1}{2}$.

Alors $u_{n+1} = f(u_n) \in]0; \frac{1}{2}[$ d'après I - 2 - b.

Autrement dit, $]0; \frac{1}{2}[$ est stable par f.

C) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < \frac{1}{2}$.

3. b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|.$$

Or, on a montré en II - 2 - a :

$$\forall x \in [0; \tfrac{1}{2}], \quad 0 \leq f'(x) < \frac{1}{2}.$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, f est $\frac{1}{2}$ - lipschitzienne sur $[0; \frac{1}{2}]$.

En particulier, $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

i.e. $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$.

3. c) I) $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$ puisque $u_0, \alpha \in]0; \frac{1}{2}[$.

H) Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

$$|u_{n+1} - \alpha| \underset{\text{II-3-b}}{\leq} \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \underset{\text{H.R}}{\leq} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

donc $|u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$.

C) $\forall n \in \mathbb{N}, \; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

3. d) $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

On a $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

D'après le théorème des gendarmes, $|u_n - \alpha| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

i.e. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha$.

Partie III

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \left[\frac{e^{k/n}}{e^{2k/n} + e}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \left[\frac{e^{k/n}}{e^{k/n}\left(e^{k/n} + e^{1-\frac{k}{n}}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} k \left[\frac{1}{e^{k/n} + e^{\frac{n-k}{n}}}\right]$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{e^{k/n} + e^{\frac{n-k}{n}}}$$

$$= S_n. \quad \text{CQFD}$$

1. b) $$\int_0^1 x f(x)\,dx \overset{t = 1-x;\ dt = -dx}{=} \int_1^0 (1-t) f(1-t) (-dt)$$

$$= \int_0^1 (1-t) \underbrace{f(1-t)}_{\substack{= f(t) \\ (\text{I}-1-a)}} dt$$

$$= \int_0^1 (1-t) f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt - \int_0^1 t f(t)\,dt$$

donc $2\int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$ puis $\int_0^1 x f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^{1/2} f(x)\,dx$.

CQFD

2) D'après le théorème sur les sommes de Riemann, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 x f(x)\, dx = \int_0^{1/2} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{e}}\left[\arctan(\sqrt{e}) - \frac{\pi}{4}\right]$$

Exercice 2 - Bac Maroc 2025

$$\begin{cases} \cdot\ \alpha \in [0; 2\pi[\\ \cdot\ (E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)z + i\,2^{2\alpha+1}e^{i2\alpha} = 0 \end{cases}$$

Partie I

1.a) $\Delta_\alpha = \left[-2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i)\right]^2 - 4\times 1\times (i\,2^{2\alpha+1})e^{i2\alpha}$

$$\Delta_\alpha = (2^\alpha)^2(e^{i\alpha})^2(1+2i)^2 - 4i\times 2\times (2^\alpha)^2(e^{i\alpha})^2$$

$$\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha})^2\left[(1+2i)^2 - 8i\right]$$

$$\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha})^2\left[1+4i-4-8i\right]$$

$$\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha})^2(-4i-3).$$

Or, $(1-2i)^2 = 1-4i+(2i)^2 = 1-4i-4 = -4i-3$

donc $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha})^2(1-2i)^2$

$$\boxed{\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)\right)^2}$$

1.b) Notons d'abord z_1 et z_2 les solutions.

$$z_1 = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) - 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2}$$

$$z_1 = 2^{\alpha-1}e^{i\alpha}\left[1+2i-(1-2i)\right]$$

$$z_1 = 2^{\alpha-1}e^{i\alpha}(4i)$$

$$z_1 = 2^{\alpha+1}ie^{i\alpha}$$

$$z_1 = 2^{\alpha+1}e^{i(\alpha+\frac{\pi}{2})}, \quad |z_1| = 2^{\alpha+1}$$

$$z_2 = \frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1+2i) + 2^\alpha e^{i\alpha}(1-2i)}{2}$$

$$z_2 = 2^{\alpha-1} e^{i\alpha}\left[1+2i+1-2i\right]$$

$$z_2 = 2^{\alpha-1}e^{i\alpha}\cdot 2$$

$$z_2 = 2^\alpha e^{i\alpha} \quad , |z_2| = 2^\alpha$$

Donc $\boxed{\begin{cases} a = 2^\alpha e^{i\alpha} \\ b = 2^{\alpha+1} e^{i\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} \end{cases} ; \ 0<|a|<|b|}$

2) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{2^{\alpha+1} i \cancel{e^{i\alpha}}}{2^\alpha \cancel{e^{i\alpha}}} = 2i \in i\mathbb{R}$.

Partie II

$\dfrac{b}{a} = \lambda i$, $\lambda = \mathrm{Im}\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$$

1.a) $\dfrac{h}{b-a} = \dfrac{ab}{(a+b)(b-a)} = \dfrac{ab}{b^2-a^2}$

$$\frac{h}{b-a} = \frac{a^2\left(\frac{b}{a}\right)}{a^2\left(\left(\frac{b}{a}\right)^2-1\right)} = \frac{\lambda i}{(\lambda i)^2-1} = \frac{\lambda i}{-\lambda^2-1}$$

d'où $\dfrac{h}{b-a} = -\left(\dfrac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$

Comme $\lambda \in \mathbb{R}$, $\dfrac{h}{b-a} \in i\mathbb{R}$ $\quad$ ($h \neq 0$ car $a, b \neq 0$)

puis $\arg\left(\dfrac{h-0}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$ puis $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\,[\pi]$

donc $(OH) \perp (AB)$.

1. b) $\dfrac{h-a}{b-a} = \dfrac{\dfrac{ab}{a+b} - a}{b-a} = \dfrac{ab - a(a+b)}{(b+a)(b-a)}$

$\dfrac{h-a}{b-a} = \dfrac{-a^2}{b^2-a^2} = \dfrac{-a^2}{a^2\left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 - 1\right)} = \dfrac{-1}{(\lambda i)^2 - 1}$

$\dfrac{h-a}{b-a} = \dfrac{-1}{-\lambda^2 - 1} = \dfrac{1}{\lambda^2+1} \in \mathbb{R}_+^*$

donc $\arg\left(\dfrac{h-a}{b-a}\right) \equiv 0\ [2\pi]$

puis $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) \equiv 0\ [2\pi]$

donc H, A, B alignés.

2. a) • $m = \dfrac{0+h}{2} = \dfrac{h}{2}$

• $n = \dfrac{h+b}{2}$

$\dfrac{n}{m-a} = \dfrac{\dfrac{h+b}{2}}{\dfrac{h}{2} - a} = \dfrac{h+b}{h-2a} = \dfrac{\dfrac{ab}{a+b} + b}{\dfrac{ab}{a+b} - 2a}$

$\dfrac{n}{m-a} = \dfrac{ab + b(a+b)}{ab - 2a(a+b)} = \dfrac{2ab + b^2}{-2a^2 - ab}$

$\dfrac{n}{m-a} = \dfrac{a^2\left[2\left(\dfrac{b}{a}\right) + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2\right]}{a^2\left[-2 - \dfrac{b}{a}\right]} = \dfrac{2(\lambda i) + (\lambda i)^2}{-2 - \lambda i}$

$\dfrac{n}{m-a} = \dfrac{2\lambda i - \lambda^2}{-2 - \lambda i} = \dfrac{-\lambda i(-2 - \lambda i)}{-2 - \lambda i} = -\lambda i$

On a $n = \dfrac{h+b}{2}$

$n \neq 0$ car $h, b \neq 0$ et $h \neq -b$ [en effet, sinon $\dfrac{1}{-b} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

i.e $\dfrac{-2}{b} = \dfrac{1}{a}$ 4/7

i.e $\dfrac{b}{a} = -2$, ce qui est faux car $\dfrac{b}{a} \in i\mathbb{R}$ par hypothèse]

2.b) $\arg\left(\dfrac{n-0}{m-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

i.e. $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

donc $(AI) \perp (OJ)$.

De plus, $\left|\dfrac{n}{m-a}\right| = |-\lambda i| = |\lambda| = \dfrac{|n|}{|m-a|} = \dfrac{OJ}{AI}$

donc $|\lambda| = \dfrac{OJ}{AI}$ i.e. $OJ = |\lambda| AI$.

2.d) Il suffit de montrer $\arg\left(\dfrac{z_J - z_I}{z_A - z_O}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.

$$\frac{z_J - z_I}{z_A - z_O} = \frac{n-m}{a} = \frac{\frac{h+b}{2} - \frac{h}{2}}{a} = \frac{b}{2a} = \frac{\lambda i}{2} \in i\mathbb{R}$$

On a bien $(IJ) \perp (OA)$.

2. c) En regardant sur Bibmath, on peut penser à utiliser le critère de cocyclicité basé sur le théorème de l'angle inscrit :

$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \iff (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) [\pi].$$

Problème : pour appliquer ceci, il faudrait trouver l'affixe de K en fonction des autres données du problème ?

Essayons de voir ce que cela donne ... Peut-être qu'on peut se débrouiller sans.

On veut $(\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{HI}) \equiv (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JI}) [\pi]$

$$\text{i.e. } \arg\left(\frac{z_I - z_H}{z_K - z_H}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_I - z_J}{z_K - \cancel{z_J}}\right) [\pi]$$

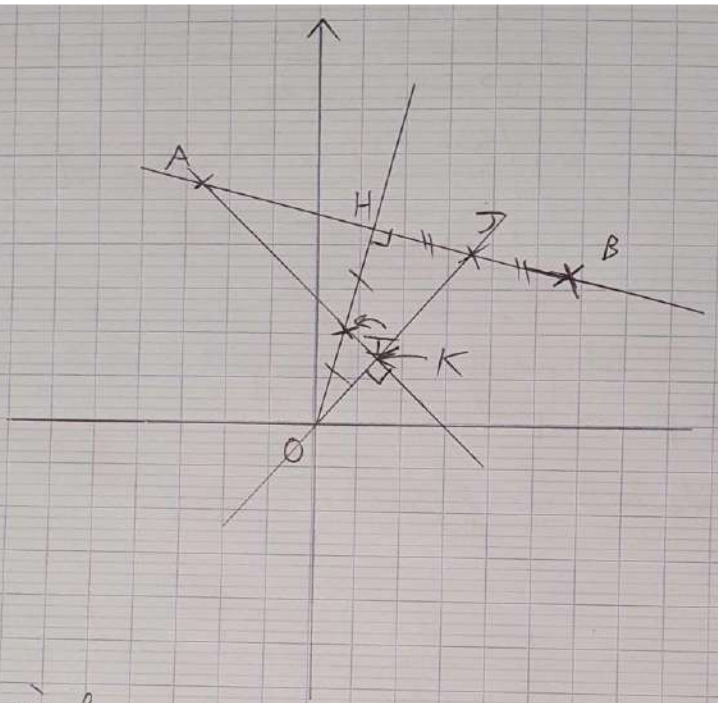
$$\text{i.e. } \arg\left(\left(\frac{z_I - z_H}{z_K - z_H}\right) \cdot \left(\frac{z_K - z_J}{z_I - z_J}\right)\right) \equiv 0 [\pi]$$

$$\text{i.e. } \arg\left(\left(\frac{m - h}{z_K - h}\right)\left(\frac{z_K - n}{m - n}\right)\right) \equiv 0 [\pi]$$

— — — —

Ce ne doit pas être la bonne piste, semble trop compliqué pour si peu de points...

Retentons une figure...



D'après la figure, IHJ est rectangle en H. Les points I, H, J sont cocycliques : le centre du cercle circonscrit à IHJ est le milieu de l'hypoténuse [IJ]. Notons r l'affixe de ce centre.

$$r = \frac{z_I + z_J}{2} = \frac{m+n}{2}.$$

Il faut montrer $|z_K - r| = \underbrace{|z_I - r|}$

$$= \frac{|z_J - z_I|}{2}$$

$$= \frac{|m-n|}{2}$$

La CNS de cocyclicité est $\left|z_K - \left(\frac{m+n}{2}\right)\right| = \frac{|m-n|}{2}$

→ Après réflexion : r est aussi le milieu de l'hypoténuse du triangle KIJ rectangle en K donc le cercle circonscrit de HIJ rectangle en H est le même que celui de KIJ.

→ Donc H, I, K, J cocycliques.

<u>Nota :</u> le fait que les triangles KIJ et HIJ sont des triangles rectangles a été prouvé dans les questions précédentes concernant la perpendicularité de (OJ) et (AI) ainsi que des droites (OH) et (AB).

Exercice 3 - Bac maroc 2025

- $p \in \mathcal{P}$ impair
- $a \in \mathbb{N}^*$ premier avec p ($a \neq 0$ car on aurait $a \wedge p = p \geqslant 3$)

1) Si p impair, $p \geqslant 3$, $\frac{p-1}{2} \in \mathbb{N}^*$

Le petit théorème de Fermat donne $a^{p-1} \equiv 1 [p]$

Les deux possibilités proposées pour $a^{\frac{p-1}{2}}$ sont compatibles avec ce théorème (en élevant au carré) mais il faut prouver que ce sont les seules possibilités. Si $p = 3$, c'est clair par liste exhaustive.

On remarque que $a^{p-1} - 1 = \left(a^{\frac{p-1}{2}}\right)^2 - 1^2$

$$= \left(a^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(a^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 [p].$$

Or, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un corps : d'après ceci, $\begin{cases} p \in \mathcal{P} \\ p \mid ab \end{cases} \Rightarrow p \mid a$ ou $p \mid b$.

Donc $a^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0 [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 [p]$

puis $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$ ou $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 [p]$.

$ax^2 \equiv 1 [p]$

2.b) $a x_0^2 \equiv 1 [p]$

On élève à la puissance $\frac{p-1}{2}$:

$$a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} x_0^{p-1} \equiv 1 [p]$$

En admettant la 2.a, on a bien $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 [p]$.

2\. a) Si on arrive à montrer $x_0 \wedge p = 1$, on aura le résultat directement via le petit théorème de Fermat.

Or, $a x_0^2 \equiv 1 \, [p]$

$\iff \exists k \in \mathbb{Z}, \ (a x_0) x_0 = 1 + kp$

$\iff \exists k' \in \mathbb{Z}, \ (a x_0) x_0 + k' p = 1$

D'après le théorème de Bézout, $x_0 \wedge p = 1$ et le résultat s'ensuit.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

3\. a) Supposons que $p \mid (2^{2n+1} - 1)$

i.e. $2^{2n+1} \equiv 1 \, [p]$

Alors $2 \times (2^n)^2 \equiv 1 \, [p]$

On applique le résultat précédent avec $a = 2$ qui est premier avec p puisque p est impair (et $x_0 = 2^n$ convient)

On a donc $2^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \, [p]$ d'après 2. b.

3\. b) Le théorème de Bézout nous dit qu'une CNS à l'existence d'une solution dans $\mathbb{Z}^2$ de (E) est $11 \wedge (2^{2n+1} - 1) = 1$

Comme $11 \in \mathcal{P}$ est impair, cela revient à prouver que $11 \nmid (2^{2n+1} - 1)$. Par l'absurde, supposons que $11 \mid (2^{2n+1} - 1)$

Alors on aurait $2^{\frac{11-1}{2}} \equiv 1 \, [11]$ (cf. 3. a)

puis $2^5 \equiv 1 \, [11]$ puis $31 \equiv 0 \, [11]$, ce qui est faux.

Donc $11 \nmid (2^{2n+1} - 1)$. Le résultat s'ensuit.

(F) : $x^2+5x+2 \equiv 0\ [11]$

4. a) $2(2x+5)^2 \equiv 1\ [11]$

$\iff 2(4x^2+20x+25) \equiv 1\ [11]$

$\iff 2(4x^2+9x+3) \equiv 1\ [11]$

$\iff 2(4x^2-2x+3) \equiv 1\ [11]$

$\iff 8x^2-4x+6 \equiv 1\ [11]$

$8 \wedge 11 = 1$ donc 8 admet un inverse modulo 11.

On a $7 \times 8 = 56 \equiv 1\ [11]$.

On garde l'équivalence logique en multipliant par 7 (pour revenir en arrière on multiplie par 8).

$\iff 7(8x^2-4x+6) \equiv 7\ [11]$

$\iff x^2-28x+42 \equiv 7\ [11]$

$\iff x^2+5x+(-2) \equiv 7\ [11]$

$\iff x^2+5x-9 \equiv 0\ [11]$

$\iff x^2+5x+2 \equiv 0\ [11]$

$\iff$ (F) CQFD.

4. b) C'est encore le même principe : si $x \in \mathbb{Z}$ vérifie $2(2x+5)^2 \equiv 1\ [11]$, en posant $x_0 = 2x+5$,

$2x_0^2 \equiv 1\ [11]$

et donc on en déduirait $31 \equiv 0\ [11]$, ce qui est faux.

Donc (F) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 4 - Bac Maroc 2025

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$E = \left\{ M(x) = I_3 + xA \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\} \qquad (I_3 = I)$$

1. a) Trivial.

$$A^2 = -2A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1. b) soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} M(x)\,M(y) &= (I + xA)(I + yA) \\ &= I + yA + xA + xyA^2 \\ &= I + (x+y)A - 2xyA \\ &= I + (x+y-2xy)A \\ &= M(x+y-2xy) \end{aligned}$$

2. a) $$M\left(\frac{1}{2}\right) \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = O_3$$

2. b) Par l'absurde : si $M\left(\frac{1}{2}\right) \in GL_3(\mathbb{R})$, alors

$$\left(M\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} M\left(\frac{1}{2}\right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(M\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} O_3$$

puis $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = O_3$, ce qui est faux.

Donc $M\left(\frac{1}{2}\right) \notin GL_3(\mathbb{R})$.

3) D'après 1.b), E est stable pour la multiplication dans $M_3(\mathbb{R})$.

Il reste à montrer : $\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, $M(x)M(y) \neq M\left(\frac{1}{2}\right)$.

On a $M(x)M(y) = M(x+y-2xy)$.

On veut montrer $x+y-2xy \neq \frac{1}{2}$

i.e $x+y-2xy-\frac{1}{2} \neq 0$

i.e $-\frac{1}{2}\left(x+y-2xy-\frac{1}{2}\right) \neq 0$

i.e $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right) \neq 0$

Ceci est vrai puisque $x, y \neq \frac{1}{2}$.

Donc $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est stable par produit matriciel.

4) . La loi $\times$ est interne à $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ d'après 3.
. $\times$ est associative
. $I \in E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ (prendre $x = 0$)

magma associatif et unifère = monoïde

. Il faut montrer que tout élément de $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$ est inversible et que l'inverse reste dans $E - \left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$.

Soit $x, y \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

$$M(x)M(y) = I \iff M(x+y-2xy) = I$$
$$\iff x+y-2xy = 0$$
$$\iff x(1-2y) = -y$$
$$\iff x = \frac{-y}{1-2y} \quad \text{(possible car } 1-2y \neq 0 \text{ puisque } y \neq \tfrac{1}{2}\text{)}$$
$$\iff x = \frac{y}{2y-1} \neq \frac{1}{2} \quad \left(\text{en effet, } \frac{y}{2y-1} = \frac{1}{2} \iff 2y = 2y-1 \iff \underbrace{0=-1}_{\text{absurde}}\right)$$

Donc $E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$ est un groupe.

$\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \ (M(x))^{-1} = M\left(\frac{x}{2x-1} \right) \right)$

- Enfin : $M(y)M(x) = M(y + x - 2yx)$
$= M(x + y - 2xy)$
$= M(x)M(y)$

$\times$ est une l.c.i commutative dans $E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$.

Donc $\left(E - \left\{ M\left(\frac{1}{2}\right) \right\}, \times \right)$ est un groupe commutatif.

5) $(E, \top)$ avec $\top : E^2 \longrightarrow E$

$(M(x), M(y)) \longmapsto M\left(x + y - \frac{1}{2} \right)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$\top$ est clairement une l.c.i sur E

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow E$

$x \longmapsto M\left(\frac{1-x}{2} \right)$

Groupe commutatif

a) MQ φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(E, \top)$.

- $\varphi(0) = M\left(\frac{1}{2}\right)$ qui est le neutre de $(E, \top)$

$M(x) \top M\left(\frac{1}{2}\right) = M\left(\frac{1}{2}\right) \top M(x) = M(x)$

- Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\varphi(x+y) = M\left(\frac{1 - (x+y)}{2} \right) = M\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right)$

$\varphi(x) \top \varphi(y) = M\left(\frac{1-x}{2} \right) \top M\left(\frac{1-y}{2} \right)$

$= M\left(\frac{1-x}{2} + \frac{1-y}{2} - \frac{1}{2} \right)$

$= M\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2} - \frac{y}{2} \right)$

Donc $\varphi(x+y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R},+)$ vers $(E,\top)$.

De plus :

$$\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ M\left(\frac{1-x}{2}\right) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}$$

Or, $\begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1-x}{2} \end{pmatrix}$ est trivialement bijective.

Donc $\varphi(\mathbb{R}) = \left\{ M(y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}$

i.e $\varphi(\mathbb{R}) = E$.

5. b) L'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme est un groupe commutatif donc $(E,\top)$ est un groupe commutatif

6)
- $(E,\top)$ groupe commutatif
- $\times$ est commutative dans E (cf. question 4)
- $\times$ est distributive par rapport à $\top$:

soit $N \in E$. Soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $N = M(z)$ (un tel z existe car $\varphi(\mathbb{R}) = E$)

D'une part :

$$N \times \left(M(x) \top M(y)\right)$$

$$= M(z) \times M\left(x+y-\frac{1}{2}\right)$$

$$= M\left(z + \left(x+y-\frac{1}{2}\right) - 2z\left(x+y-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$= M\left(-2xz - 2yz + x + y + 2z - \frac{1}{2}\right)$$

D'autre part :

$$\left(N \times M(x)\right) \top \left(N \times M(y)\right)$$

$$= \left(M(z)M(x)\right) \top \left(M(z)M(y)\right)$$

$$= M(z+x-2zx) \top M(z+y-2yz)$$

$$= M\left(\left(z+x-2zx\right)+\left(z+y-2zy\right)-\frac{1}{2}\right)$$

$$= M\left(-2xz-2yz+x+y+2z-\frac{1}{2}\right)$$

On a bien la distributivité à gauche, celle à droite provient de la commutativité de $\times$ dans E

- $\top$ admet un élément neutre, à savoir $M\left(\frac{1}{2}\right)$ et on a vu en 4) que $\left(E-\left\{M\left(\frac{1}{2}\right)\right\}, \times\right)$ est un groupe abélien, de neutre I

Donc $(E, \top, \times)$ est un corps commutatif.

Complément : transport de structure de groupe commutatif via un morphisme de magmas surjectif

Preuve du théorème utilisé en 5.b

Soit $(E, *)$ un groupe commutatif et (F, Δ) un magma.
Soit φ un morphisme surjectif de E dans F i.e une application $\varphi \in \mathcal{F}(E,F)$ telle que $\varphi(E)=F$ et :

$$\forall x_1, x_2 \in E, \quad \varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_1)\,\Delta\,\varphi(x_2)$$

Montrons que (F, Δ) est un groupe commutatif.

- Associativité de Δ : soit $z_1, z_2, z_3 \in F$ et $x_1, x_2, x_3 \in E$ tels que $z_1 = \varphi(x_1)$, $z_2 = \varphi(x_2)$, $z_3 = \varphi(x_3)$.

$$\begin{aligned}
(z_1 \Delta z_2)\,\Delta\, z_3 &= \left(\varphi(x_1)\,\Delta\,\varphi(x_2)\right)\Delta\,\varphi(x_3) \\
&= \left(\varphi(x_1 * x_2)\right)\Delta\,\varphi(x_3) \\
&= \varphi\left((x_1 * x_2) * x_3\right) \quad \text{φ est un morphisme} \\
&= \varphi\left(x_1 * (x_2 * x_3)\right) \quad (\text{$*$ est associative}) \\
&= \varphi(x_1)\,\Delta\,\varphi(x_2 * x_3) \\
&= \varphi(x_1)\,\Delta\left(\varphi(x_2)\,\Delta\,\varphi(x_3)\right) \quad \text{φ est un morphisme} \\
&= z_1\,\Delta\,(z_2\,\Delta\,z_3)
\end{aligned}$$

- <u>Commutativité de Δ :</u> même principe

$$z_1 \Delta z_2 = \varphi(x_1) \Delta \varphi(x_2) = \varphi(x_1 * x_2) = \varphi(x_2 * x_1) = \varphi(x_2) \Delta \varphi(x_1)$$
$$= z_2 \Delta z_1$$

- <u>Élément neutre de F pour Δ :</u> soit e l'élément neutre de $(E, *)$.

Soit $z \in F$ et $x \in E$ tel que $z = \varphi(x)$.

$$\begin{aligned} z \Delta \varphi(e) &= \varphi(e) \Delta z \\ &= \varphi(e) \Delta \varphi(x) \\ &= \varphi(e * x) \\ &= \varphi(x) \\ &= z \end{aligned}$$

donc $\varphi(e)$ est le neutre de F.

- <u>Inversibilité des éléments de F :</u> notons encore $z = \varphi(x)$.

Soit x' l'élément symétrique de x dans E.

$$\begin{aligned} \varphi(x * x') = \underbrace{\varphi(e)}_{\text{neutre de F}} &= \varphi(x) \Delta \varphi(x') \\ &= z \Delta \varphi(x') \\ &= \varphi(x') \Delta z \end{aligned}$$

$\varphi(x')$ est le symétrique de z.

CQFD.