Corrigé de l'épreuve de Maths
Examen National SN 2024
11/06/2024

$2^{ème}$ année Sciences Mathématiques

Fait par
Mr.EL ABBASSI Mohammed
Professeur de Mathématiques
Au lycée Ibn Abdoun- Khouribga

NB : Je fais ces corrigés dont le but de contribuer à donner un model à nos chers élèves, j'espère avoir réussi à leur donner un bon model à suivre.

Exercice 1 (L'Analyse1)

$$\left(\forall x\in[1,+\infty[\right) :\ f(1)=\frac{1}{2}\ \text{et}\ \ f(x)=\frac{\ln x}{x^2-1},\ si\ x>1.$$

1) On a : $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1}{2}\frac{\ln x^2}{x^2-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\ln t}{t-1}=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}=f(1)$. *(posons* $t=x^2$ *)*

Donc f est continue à droite en 1 .

2) On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x-x^{-1}}\times\frac{\ln x}{x}=0\times0=0$

Donc la droite d'équation : $y=0$ *c.à.d l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de la courbe* (C) *au voisinage de* $+\infty$.

3) a- Soit $x\in]1,+\infty[$.

Posons $t=(x-1)^2$ *, donc* $1-x=-\sqrt{t}$ *et* $x=\sqrt{t}+1$ *donc* $\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}=\frac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}$.

b-Soit $t\in]0,+\infty[$ *. Appliquons le TAF à la fonction* g *définie par :* $g(x)=-\sqrt{x}+\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ *sur le segment* $[0,t]$.

Comme la fonction : $x\to1+\sqrt{x}$ *est continue et strictement positive sur* $[0,t]$ *et comme la fonction* $\ln$ *est continue sur* $]0,+\infty[$ *alors la fonction:* $x\to\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ *est continue sur* $[0,t]$ *donc* g *est continue sur* $[0,t]$ *et comme la fonction :* $x\to1+\sqrt{x}$ *est dérivable et strictement positive sur* $]0,t[$ *alors la fonction:* $x\to\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$ *est dérivable sur* $]0,t[$

alors d'après le TAF $\left(\exists c\in]0,t[\right)$: $\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=g'(c)=\frac{-1}{2\sqrt{c}}+\frac{1}{2\sqrt{c}\left(1+\sqrt{c}\right)}=\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{c}\right)}$

Comme $0<c<t$ *alors* $\frac{-1}{2}<\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{c}\right)}<\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$ *. Donc* $\frac{-1}{2}<\frac{g(t)-g(0)}{t-0}<\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$

c.à.d $\frac{-1}{2}<\frac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}<\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$.

c- On a : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}$ *(car :* $t=(x-1)^2$ *).*

Et comme $(\forall t>0):\frac{-1}{2}<\frac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}<\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}$ *et* $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-1}{2\left(1+\sqrt{t}\right)}=\frac{-1}{2}$ *alors* $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}=\frac{-1}{2}$

Et par suite $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}=\frac{-1}{2}$.

4)a- Soit $x\in]1,+\infty[$.

On a d'une part : $\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{\frac{\ln x}{x^2-1}-\frac{1}{2}}{x-1}=\frac{1}{x-1}\times\frac{2\ln x-\left(x^2-1\right)}{2\left(x^2-1\right)}$

Et d'autre part :

$$-\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{\ln x-x+1}{2(x-1)^2}=\frac{-(x-1)\ln x+(x+1)(\ln x-(x-1))}{2(x+1)(x-1)^2}$$

$$=\frac{1}{x-1}\times\frac{\ln x(-(x-1)+(x+1))-(x+1)(x-1)}{2(x^2-1)}$$

$$=\frac{1}{x-1}\times\frac{2\ln x-(x^2-1)}{2(x^2-1)}$$

D'où , on a : $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln x}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln x-x+1}{2(x-1)^2}$.

b-On a :

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\left(-\frac{\ln x}{x-1}\times\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2}\times\frac{1-x+\ln x}{(x-1)^2}\right)=-1\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}\in\mathbf{R}$$

Donc f *est derivable à droite en 1 et on a :* $f_d(1)=\frac{-1}{2}$ *et la courbe* (C) *admet une demi-tangente à droite au point* $A\left(1,\frac{1}{2}\right)$ *de coefficient directeur* $\frac{-1}{2}$.

5)a- Soit $x\in]1,+\infty[$ *, montrons que* $0\le I(x)\le J(x)$.

Comme la fonction : $t\mapsto\dfrac{t^2-1}{t^3}$ *est continue et positive sur* $]1,+\infty[$ *et comme* $(0,x)\in]1,+\infty[^2$ *tel que* $0\le x$ *alors* $\displaystyle\int_0^x\frac{t^2-1}{t^3}dt\ge0$ *et comme* $(\forall t\in[1,x]):\dfrac{t^2-1}{t^3}\le\dfrac{t^2-1}{t^2}$ *(car* $(\forall t\in[1,x])$: $t^2-1\ge0$ *et* $\dfrac{1}{t^3}\le\dfrac{1}{t^2}$ *) alors* $\displaystyle\int_0^x\frac{t^2-1}{t^3}dt\le\int_0^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$.

D'où on a : $0\le I(x)\le J(x)$.

b- Soit $x\in]1,+\infty[$ *, On a :* $I(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt=\int_1^x\left(\frac{1}{t}-t^{-3}\right)dt=\left[\ln t+\frac{1}{2}t^{-2}\right]_1^x=\ln x+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{2}=\ln x-\frac{x^2-1}{2x^2}$

et $J(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt=\int_1^x\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[t+\frac{1}{t}\right]_1^x=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2x}{2x^2}=\frac{(x-1)^2}{2x^2}$.

c-Comme la fonction ln est dérivable sur $]1,+\infty[$ *et la fonction :* $x\mapsto x^2-1$ *est dérivable et ne s'annule pas sur* $]1,+\infty[$ *alors la fonction* f *est dérivable sur* $]1,+\infty[$ *et on a* $(\forall x\in]1,+\infty[)$*:*

$$f'(x)=\frac{\ln'(x)(x^2-1)-(x^2-1)'\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{x^2-1}{x}-2x\ln x}{(x^2-1)^2}=\frac{\frac{\frac{x^2-1}{x^2}-2\ln x}{(x^2-1)^2}}{x}=\frac{\frac{-2\left(\ln x-\frac{x^2-1}{2x^2}\right)}{(x+1)^2(x-1)^2}}{x}=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{\ln x-\frac{x^2-1}{2x^2}}{\frac{(x-1)^2}{x}}$$

D'où, on a $(\forall x\in]1,+\infty[)$*:* $f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$.

d- Soit $x \in]1,+\infty[$ *, comme* $f'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{I(x)}{J(x)}$ *et comme* $0 \le I(x) \le J(x)$ *et* $J(x) \rangle 0$ *et* $\frac{-1}{2} \langle \frac{-2}{(x+1)^2} \langle 0$ *(car* $(x+1)^2 \rangle 4$ *) alors* $\frac{-1}{2} \le f'(x) \le 0$.

6)a- Comme $(\forall x \in]1,+\infty[) : f'(x)=\frac{-2}{(x+1)^2}\times\frac{I(x)}{J(x)}$.

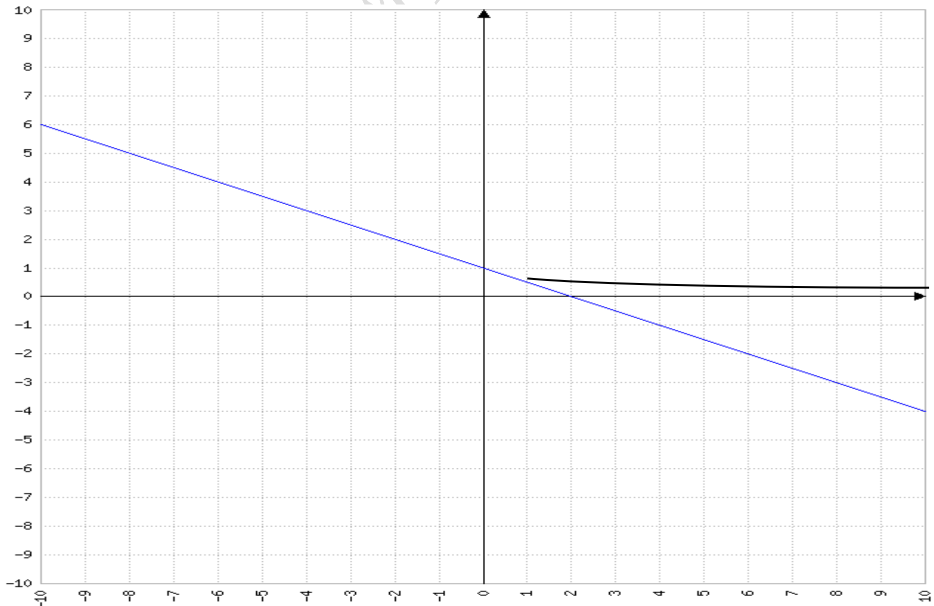
Comme la fonction : $t \mapsto \frac{t^2-1}{t^3}$ *est continue sur* $[1,+\infty[$ *et comme* $1 \in [1,+\infty[$

alors la fonction $I : x \mapsto I(x)$ *est dérivable sur* $[1,+\infty[$ *et On a* $(\forall x \in [1,+\infty[) : I'(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$ *et comme* $(\forall x \in]1,+\infty[) : I'(x) \rangle 0$ *alors la fonction* I *est strictement croissante sur* $]1,+\infty[$ *et comme elle est continue à droite en* 1 *alors elle est strictement croissante sur* $[1,+\infty[$, *donc on a* $(\forall x \in]1,+\infty[) : I(x) \rangle I(1)=0$.

Donc on a : $(\forall x \in]1,+\infty[) : f'(x) \langle 0$, *donc* f *est strictement décroissante sur* $]1,+\infty[$ *et comme elle est continue à droite en 1 alors elle est strictement décroissante sur* $[1,+\infty[$. *D'où le tableau de variations de* f :

x	1 $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$1/2 \searrow 0$

b- Courbe représentative de f



7) Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - x + 1$

On a h *est dérivable sur* $]1,2[$ *(somme de deux fonctions dérivables) et* $\left(\forall x \in]1,2[\right) : h'(x) = f'(x) - 1 < 0$ *donc* h *est continue et strictement décroissante sur* $]1,2[$ *donc elle réalise une bijection de* $]1,2[$ *vers* $h\left(]1,2[\right) = \left]\lim_{x\to 2^-} h(x), \lim_{x\to 1^+} h(x)\right[=]h(2), h(1)[$ *et comme* $h(2) = f(2) - 1 < 0$ et $h(1) = f(1) = \frac{1}{2} > 0$ *alors* $\left(\exists! \alpha \in]1,2[\right) : h(\alpha) = 0$ *c.à.d* $\left(\exists! \alpha \in]1,2[\right) : f(\alpha) = \alpha - 1$.

8) $a_0 \in [1,+\infty[$ *et* $a_{n+1} = 1 + f(a_n) = \varphi(a_n)$ *pour tout* $n \in \mathbf{N}$, *avec* φ *est la fonction définie par :* $\varphi(x) = f(x) + 1$. *On a* φ *est dérivable sur* $[1,+\infty[$ *et* $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right) : |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$ *(d'après la question 5)d et du fait que* $f_d'(1) = \frac{-1}{2}$ *et* $\left(\forall x \in [1,+\infty[\right) \varphi'(x) = f'(x)$, *donc d'après le théorème de l'inégalité des accroissements finis on a* $\left(\forall (a,b) \in [1,+\infty[^2\right) : |\varphi(b) - \varphi(b)| \leq \frac{1}{2}|b - a|$ *et comme* $\alpha \in [1,+\infty[$ *et* $(\forall n \in \mathbf{N}) : a_n \in [1,+\infty[$ *(puisque* $\varphi\left([1,+\infty[\right) = \left]1, \frac{3}{2}\right] \subset [1,+\infty[$ *) alors on a* $(\forall n \in \mathbf{N})$: $|\varphi(a_n) - \varphi(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$ *et comme* $\varphi(a_n) = a_{n+1}$ *et* $\varphi(\alpha) = \alpha$ *alors on a* $(\forall n \in \mathbf{N}) : |a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$.

b-Montrons par récurrence que $(\forall n \in \mathbf{N}) : |a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$.

Pour $n = 0$, *on a :* $\left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - \alpha| = |a_0 - \alpha|$ donc $|a_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |a_0 - \alpha|$.

Donc la propriété est vérifiée pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, *supposons que* $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ *et montrons que* $|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - \alpha|$.

Comme $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|a_n - \alpha|$ *(d'après la question précédente) et comme* $|a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ *(S.H.R)*

Alors on a : $|a_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a_0 - \alpha|$.

Et par suite, d'après le principe de la récurrence, on a $(\forall n \in \mathbf{N}) : |a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$.

c-On a, d'après la question précédente, $(\forall n \in \mathbf{N}) : |a_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a_0 - \alpha|$ *et comme* $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ *(car* $-1 < \frac{1}{2} < 1$*) alors la suite* (a_n) *est convergente et on a :* $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$.

Exercice 2 (L'Analyse2)

$$\left(\forall x \in [0,1]\right) : F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

1)a- Comme la fonction : $t \mapsto e^{t^2}$ *est continue sur* $\mathbf{R}$ *et en particulier sur* $[0,1]$ *et comme* $0 \in [0,1]$ *alors la fonction* F *est dérivable et par suite continue sur* $[0,1]$ *et* $\left(\forall x \in [0,1]\right)$: $F'(x) = e^{x^2} > 0$, *donc* F *est strictement croissante sur* $[0,1]$.

b- Comme F est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ *alors elle réalise une bijection de* $[0,1]$ *vers* $F([0,1])=[F(0),F(1)]=[0,\beta]$, *avec* $\beta=F(1)=\int_0^1 e^{t^2}dt$.

2) On a $(\forall n\in\mathbf{N}^*)$: $\beta S_n=\frac{\beta-0}{n}\sum_{k=1}^{n}F^{-1}\left(0+\frac{k}{n}(\beta-0)\right)$.

a- Comme F^{-1} *est continue sur* $[0,\beta]$ *(car F est continue sur* $[0,1]$*) alors la suite* $(\beta S_n)_{n\geq1}$ *est convergente et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta S_n=\int_0^\beta F^{-1}(x)dx$. *Et par suite, la suite* $(S_n)_{n\geq1}$ *est convergente et on a :* $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=l=\frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(x)dx$.

b- Considérons l'intégrale $\int_0^\beta F^{-1}(x)dx$ *et faisons un changement de variable en posant* $u=F^{-1}(x)$. On a $(\forall x\in[0,\beta])(\forall u\in[0,1])$: $u=F^{-1}(x)\Leftrightarrow x=F(u)$

Donc on a : $dx=F'(u)du=e^{u^2}du$. *De même on a :* $x=0\Leftrightarrow u=0$ *et* $x=\beta\Leftrightarrow u=1$

D'où on a : $\int_0^\beta F^{-1}(x)dx=\int_0^1 ue^{u^2}du$. *Et par suite, on a :* $l=\frac{1}{\beta}\int_0^1 ue^{u^2}du$.

c- Déduction

Considérons l'intégrale $\int_0^1 ue^{u^2}du$

On a : $\int_0^1 ue^{u^2}du=\frac{1}{2}\int_0^1(u^2)'e^{u^2}du=\frac{1}{2}\left[e^{u^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}(e-1)$.

Et par suite on a : $l=\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{2}(e-1)\right)=\frac{e-1}{2\beta}$.

Exercice 3 (Complexe)

Partie 1

$$(E_\alpha):\ z^2-2iz+\alpha=0 \quad , \quad \alpha\in\mathbf{C}$$

1)a-On a : $\Delta=(-2i)^2-4\alpha=-4-4\alpha=-4(1+\alpha)$.

b- On a (E_α) *admet deux solutions distinctes dans* $\mathbf{C}$ *si seulement si* $\Delta\neq0$.

Donc (E_α) *admet deux solutions distinctes dans* $\mathbf{C}$ *si seulement si* $\alpha\neq-1$.

Donc l'ensemble des valeurs de α *pour lesquelles* (E_α) *admet deux solutions distinctes dans* $\mathbf{C}$ *est* $\mathbf{C}\backslash\{-1\}$.

2) On a pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$ *l'équation* (E_α) *est de la forme* $az^2+bz+c=0$ *avec* $a=1$, $b=-2i$ *et* $c=1$. *On sait que :* $z_1+z_2=-\frac{b}{a}=2i$ et $z_1z_2=\frac{c}{a}=\alpha$.

Partie 2

Considérons les points $\Omega(\alpha)$, $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

1)On suppose dans cette question que $\alpha = m^2 - 2m$, avec $m \in \mathbf{R}$.

a- Dans ce cas on a : $\Delta = -4(m-1)^2 = (2i(m-1))^2$, d'où :

$$z_1 = \frac{2i - 2i(m-1)}{2} = (2-m)i \quad \text{et} \quad z_1 = \frac{2i + 2i(m-1)}{2} = mi$$

b- Comme $m \in \mathbf{R}$ alors $2-m \in \mathbf{R}$, donc z_1 et z_2 sont des nombres imaginaires purs.

D'où les points M_1 et M_2 appartiennent à l'axe imaginaire, et comme le point O l'est aussi alors les trois points O, M_1 et M_2 sont alignés.

2) On suppose que les trois points O, M_1 et M_2 ne sont pas alignés. On en déduit que $\alpha \neq 0$, car si non c.à.d si $\alpha = 0$ alors on aura $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$ (puisque $z_1 z_2 = \alpha$) et dans ce cas on aura $M_1 = O$ ou $M_2 = O$ et donc les points O, M_1 et M_2 seront alignés.

D'où $z_1 \neq 0$ et $z_2 \neq 0$

a- On a :

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} \in i\mathbf{R}$$
$$\Leftrightarrow z_1\overline{z_2} \in i\mathbf{R} \ (car\ |z_2|^2 \in \mathbf{R}^*)$$
$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = 0$$

b- On a :

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) = (z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 - 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$$
$$= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 - 4\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1 + z_2|^2 - 4\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2})$$

c-Tenant compte de l'équivalence de la question 2)a et du résultat de la question 2)b,on a :

$$\frac{z_1}{z_2} \in i\mathbf{R} \Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2$$
$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |z_1 + z_2|$$
$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = |2i| = 2 \ \ (car\ z_1 + z_2 = 2i\ )$$

3) a-On a : $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = (z_1 + z_2)^2 - 4z_1z_2 = (2i)^2 - 4\alpha = -4 - 4\alpha = -4(1+\alpha) = \Delta$

b- $\Gamma = \{\Omega(\alpha) \in P /\ le\ triangle\ OM_1M_2\ est\ rectangle\ en\ O\}$

Soit $\Omega(\alpha) \in P$, ona :

$$\Omega(\alpha) \in \Gamma \Leftrightarrow OM_1M_2\ est\ rectangle\ en\ O$$
$$\Leftrightarrow \frac{z_{M_1} - z_O}{z_{M2} - z_O} \in i\mathbf{R}$$
$$\Leftrightarrow \frac{z_1}{z_2} \in i\mathbf{R}$$
$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2| = 2 (\ d'après\ q)2c)$$
$$\Leftrightarrow |z_1 - z_2|^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow |(z_1 - z_2)^2| = 4$$
$$\Leftrightarrow |-4(1+\alpha)| = 4$$
$$\Leftrightarrow |\alpha - (-1)| = 1 \Leftrightarrow A\Omega = 1.(\ avec\ A(-1)\ )$$
$$\Leftrightarrow \Omega(\alpha) \in C(A(-1),1)$$

D'où $\Gamma = C(A(-1),1)$

Exercice 4 (Structure)

On définit sur $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ la loi T par : $\forall(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et $\forall(c,d)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$:

$$(a,b)\mathrm{T}(c,d)=\left(a\bar{d}+c,bd\right)$$

1) a-On a : $(i,2)\mathrm{T}(1,i)=\left(i\times\bar{i}+1,2\times i\right)=(1+1,2i)=(2,2i)$ et $(1,i)\mathrm{T}(i,2)=\left(1\times\bar{2}+i,2\times i\right)=(2+i,2i)$.

b- On constate d'après la question précédente que $(i,2)\mathrm{T}(1,i)\neq(1,i)\mathrm{T}(i,2)$.

Donc la loi T est non commutative.

2) Soient (a,b) ,(c,d) et (s,t) trois éléments de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$, on a :

d'une part : $\left((a,b)\mathrm{T}(c,d)\right)\mathrm{T}(s,t)=\left(a\bar{d}+c,bd\right)\mathrm{T}(s,t)=\left(\left(a\bar{d}+c\right)\bar{t}+s,(bd)t\right)=\left(a\bar{d}\bar{t}+c\bar{t}+s,bdt\right)$

d'autre part : $(a,b)\mathrm{T}\left((c,d)\mathrm{T}(s,t)\right)=(a,b)\mathrm{T}\left(c\bar{t}+s,dt\right)=\left(a\overline{dt}+c\bar{t}+s,b(dt)\right)=\left(a\bar{d}\bar{t}+c\bar{t}+s,bdt\right)$

D'où : $(a,b)\mathrm{T}\left((c,d)\mathrm{T}(s,t)\right)=\left((a,b)\mathrm{T}(c,d)\right)\mathrm{T}(s,t)$

Donc la loi T est associative.

3) Comme $\forall(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$: $(a,b)\mathrm{T}(0,1)=\left(a\bar{1}+0,b\times1\right)=(a,b)$ et $(0,1)\mathrm{T}(a,b)=\left(0\bar{b}+a,1\times b\right)=(a,b)$

Alors $(0,1)$ est l'élément neutre de $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\mathrm{T}\right)$

4) a-On a $\forall(a,b)\in\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$: $(a,b)\mathrm{T}\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)=\left(a\overline{\left(\frac{1}{b}\right)}+\left(-\frac{a}{\bar{b}}\right),b\times\frac{1}{b}\right)=\left(\frac{a}{\bar{b}}-\frac{a}{\bar{b}},b\times\frac{1}{b}\right)=(0,1)$.

De même, on a : $\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)\mathrm{T}(a,b)=\left(\left(-\frac{a}{\bar{b}}\right)\bar{b}+a,\frac{1}{b}\times b\right)=\left(-a+a,b\times\frac{1}{b}\right)=(0,1)$

D'où tout élément (a,b) de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ est symétrisable par rapport à T de symétrique $\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)$

b- On a T est associative et non commutative dans $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et admet un élément neutre $(0,1)$ et comme tout élément (a,b) de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ est symétrisable par rapport à T de symétrique $\left(-\frac{a}{\bar{b}},\frac{1}{b}\right)$ alors $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\mathrm{T}\right)$ est un groupe non commutatif.

5) a- On a $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\subset\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\neq\varnothing$.

Soient (a,b) et (c,d) deux éléments de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$, on a : $(a,b)\mathrm{T}(c,d)=\left(a\bar{d}+c,bd\right)$

Et comme $a\bar{d}+c\in\mathbf{R}$ et $bd\in\mathbf{R}^*$ alors $(a,b)\mathrm{T}(c,d)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$.

D'où $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ est une partie stable de $\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$.

b- On a $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\subset\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*$ et $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*\neq\varnothing$. Soient (a,b) et (c,d) deux éléments de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ et $\left(-\frac{c}{\bar{d}},\frac{1}{d}\right)$ le symétrique de (c,d) dans $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\mathrm{T}\right)$, on a :

$$(a,b)\mathrm{T}\left(-\frac{c}{\bar{d}},\frac{1}{d}\right)=\left(a\times\overline{\left(\frac{1}{d}\right)}+\left(-\frac{c}{\bar{d}}\right),b\times\frac{1}{d}\right)=\left(\frac{a-c}{\bar{d}},\frac{b}{d}\right)=\left(\frac{a-c}{d},\frac{b}{d}\right)\ (car\ d\in\mathbf{R}^*)$$

Et comme $\frac{a-c}{d}\in\mathbf{R}$ et $\frac{b}{d}\in\mathbf{R}^*$ alors $(a,b)\mathrm{T}\left(-\frac{c}{\bar{d}},\frac{1}{d}\right)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$.

D'où $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^*$ est un sous-groupe de $\left(\mathbf{C}\times\mathbf{C}^*,\mathrm{T}\right)$.

Exercice 5 (Arithmétique)

Données : $(p,q)\in P^2$ *tel que* $p\neq q$ *et soit* $r\in\mathbf{N}$ *tels que* $p\wedge r=1$ *et* $q\wedge r=1$.

1) a- Comme p *et* q *sont premiers et comme* $p\wedge r=1$ *et* $q\wedge r=1$ *alors d'après le théorème de Fermat on a :* $r^{p-1}\equiv 1\ [p]$ et $r^{q-1}\equiv 1\ [q]$. *D'où on a :* $p/r^{p-1}-1$ *et* $q/r^{q-1}-1$.

b-On a : $r^{p-1}\equiv 1\ [p]$ *et* $q-1\in\mathbf{N}$ *(puisque* $q\geq 2$ *) alors* $\left(r^{p-1}\right)^{q-1}\equiv 1^{q-1}\ [p]$ *c.à.d* $r^{(p-1)(q-1)}\equiv 1\ [p]$

D'où $p/r^{(p-1)(q-1)}-1$ *et comme* p *et* q *jouent deux rôles symétriques alors on démontre de la même manière que* $q/r^{(q-1)(p-1)}-1$.

c- Comme $p/r^{(p-1)(q-1)}-1$ *et* $q/r^{(p-1)(q-1)}-1$ *et comme* $p\wedge q=1$*(puisqu'ils sont premiers et distincts)* *alors on a :* $pq/r^{(p-1)(q-1)}-1$.

2) Résolvons dans $\mathbf{Z}$ *l'équation :* $2024^{192}x\equiv 3\ [221]$

Dans ce qui précède prenons $p=13$ *et* $q=17$ *et* $r=2024$.

On a : 13 et 17 sont deux entiers naturels premiers et distincts et on a :
$(13-1)(17-1)=12\times 16=192$. *Et comme* $2024=13\times 155+9$ *et* $2024=17\times 119+1$ *alors*
13 ne divise pas 2024 *de même pour 17 et comme ils sont premiers alors on a :*
$13\wedge 2024=1$ *et* $17\wedge 2024=1$.
De la question 1) on en déduit que $13\times 17/2024^{192}-1$ *c.à.d* $221/2024^{192}-1$
Donc on a : $2024^{192}\equiv 1\ [221]$.
D'où , on a l'équivalence :

$$2024^{192}x\equiv 3\ [221]\Leftrightarrow x\equiv 3\ [221]$$
$$\Leftrightarrow x=3+221k\ \ (k\in\mathbf{Z})$$

Donc l'ensemble des solutions de notre équation est : $S=\{3+221k\ /k\in\mathbf{Z}\}$

End

Toute remarque ou suggestion de votre part sera la bienvenue

Email : elabbassimed2014@gmail.com

Tel : 0613332835

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2024
- الموضوع -
SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS-SSSS
NS 24F

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

4h	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (خيار فرنسية) 4CU799A	الشعبة المسلك

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……………………….(7.5 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte à l'analyse ……………………….(2.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte aux nombres complexes……….(3.5 pts)

- L'EXERCICE5 se rapporte aux structures algébriques......(3.5 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte à l'arithmétique ………………..(3 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé
L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(7.5 points)

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $[1,+\infty[$ par :

$$f(1)=\frac{1}{2} \text{ et pour tout } x\in]1,+\infty[\ , \quad f(x)=\frac{\ln(x)}{x^2-1}$$

Soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 1- Montrer que f est continue à droite en 1

0.5 2- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

0.25 3- a) Soit $x\in]1,+\infty[$

En posant : $t=(x-1)^2$, vérifier que : $\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=\dfrac{-\sqrt{t}+\ln(1+\sqrt{t})}{t}$

0.5 b) Montrer que $(\forall t\in]0,+\infty[)$, $-\dfrac{1}{2}<\dfrac{-\sqrt{t}+\ln\left(1+\sqrt{t}\right)}{t}<\dfrac{-1}{2(1+\sqrt{t})}$

(On pourra utiliser le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[0;t]$)

0.25 c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x+\ln(x)}{(x-1)^2}=-\dfrac{1}{2}$

0.5 4- a) Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[$, $\dfrac{f(x)-\frac{1}{2}}{x-1}=-\dfrac{\ln(x)}{x-1}\times\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln(x)-x+1}{2(x-1)^2}$

0.5 b) En déduire que f est dérivable à droite en 1 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

5- Pour tout $x\in[1,+\infty[$ on pose $I(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^3}dt$ et $J(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{t^2-1}{t^2}dt$

0.5 a) Montrer que : $\forall x\in[1,+\infty[,\ 0\le I(x)\le J(x)$

0.5 b) Montrer que pour tout $x\in[1,+\infty[$, $I(x)=\ln(x)-\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ et $J(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x}$

0.5 c) Montrer que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ f'(x)=\dfrac{-2}{(x+1)^2}\times\dfrac{I(x)}{J(x)}$

0.5 d) En déduire que : $\forall x\in]1,+\infty[,\ -\dfrac{1}{2}\le f'(x)\le 0$

0.25 6- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.5 b) Tracer la courbe (C) (On prendra $\|\vec{i}\|=1\text{cm}$ et $\|\vec{j}\|=2\text{cm}$)

0.5 7- Montrer que l'équation $f(x)=x-1$ admet une unique solution a dans $]1,2[$

8- Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$a_0\in[1,+\infty[\quad \text{et} \quad \text{pour tout } n\in\mathbb{N}, \quad a_{n+1}=1+f(a_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ |a_{n+1}-a|\leq\frac{1}{2}|a_n-a|$

0.5 b) Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}),\ |a_n-a|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|a_0-a|$

0.25 c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

EXERCICE2 :(2.5 points)

Soit F la fonction numérique définie sur l'intervalle $[0;1]$ par : $F(x)=\int_0^x e^{t^2}dt$

0.5 1-a) Montrer que F est continue, strictement croissante sur $[0;1]$

0.5 b) En déduire que F est une bijection de $[0;1]$ vers $[0;\beta]$ avec $\beta=\int_0^1 e^{t^2}dt$

2- On note F^{-1} la bijection réciproque de F

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n}F^{-1}\left(\frac{k}{n}\beta\right)$

0.5 a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente de limite $\ell=\frac{1}{\beta}\int_0^\beta F^{-1}(t)dt$

0.5 b) Montrer que $\ell=\frac{1}{\beta}\int_0^1 u\,e^{u^2}du$

(On pourra effectuer le changement de variable $u=F^{-1}(t)$)

0.5 c) En déduire que : $\ell=\frac{e-1}{2\beta}$

EXERCICE3 : (3.5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_\alpha):\ z^2-2iz+\alpha=0 \qquad \text{où } \alpha\in\mathbb{C}$$

Partie I :

0.25 1-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta=-4(1+\alpha)$

0.25 b) Déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles l'équation (E_α) admette dans l'ensemble $\mathbb{C}$ deux solutions distinctes.

0.5 2- On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_α).

Déterminer z_1+z_2 et z_1z_2

Partie II :

Soient Ω , M_1 et M_2 les points d'affixes respectivement α , z_1 et z_2

1- On suppose que $\alpha = m^2 - 2m$ avec $m \in \mathbb{R}$

0.5 a) Déterminer z_1 et z_2 en fonction de m

0.25 b) En déduire que les points O , M_1 et M_2 sont alignés.

2-On suppose que les points O , M_1 et M_2 ne sont pas alignés.

0.25 a) Montrer que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $Re\left(z_1\overline{z_2}\right) = 0$

0.5 b) Montrer que : $|z_1 - z_2|^2 = |z_1 + z_2|^2 - 4\,Re\left(z_1\overline{z_2}\right)$

0.25 c) En déduire que $\dfrac{z_1}{z_2}$ est un imaginaire pur si et seulement si $|z_1 - z_2| = 2$

0.25 3-a) Montrer que : $(z_1 - z_2)^2 = \Delta$

0.5 b) Déterminer l'ensemble Γ des points Ω pour que le triangle OM_1M_2 soit rectangle en O

EXERCICE4 : (3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif de zéro la matrice $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On considère dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$ la loi de composition interne T définie par :

$$\forall\left((a,b),(c,d)\right) \in \left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*\right)^2 \; ; \; (a,b)T(c,d) = \left(a\overline{d} + c,\, bd\right)$$

($\overline{d}$ étant le conjugué du nombre complexe d)

0.5 1-a) Vérifier que $(i,2)T(1,i) = (3,2i)$, puis calculer $(1,i)T(i,2)$

0.25 b) En déduire que la loi T n'est pas commutative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

0.5 2- Montrer que la loi T est associative dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

0.25 3- Vérifier que $(0,1)$ est l'élément neutre pour T dans $\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$

0.5 4-a) Vérifier que $\forall(a,b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^*$; $(a,b)T\left(-\dfrac{a}{\overline{b}}, \dfrac{1}{b}\right) = (0,1)$

0.5 b) Montrer que $\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T\right)$ est un groupe non commutatif.

0.5 5-a) Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est stable par la loi de composition interne T

0.5 b) Montrer que $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ est un sous-groupe du groupe $\left(\mathbb{C}\times\mathbb{C}^*, T\right)$

EXERCICE5 :(3 points)

Soient p et q deux nombres premiers distincts et r un entier naturel premier avec p et avec q

1 1- a) Montrer que p divise $r^{p-1}-1$ et que q divise $r^{q-1}-1$

0.5 b) En déduire que p et q divisent $r^{(p-1)(q-1)}-1$

0.5 c) Montrer que pq divise $r^{(p-1)(q-1)}-1$

1 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $2024^{192}x \equiv 3 \quad [221]$ (On donne : $221 = 13 \times 17$)

FIN