

EXERCICE 1 (3,25 pts)

On considère dans l'espace rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les points ;  $\Omega(-1,1,2)$  ,  $A(2,2,4)$   
 $B(6,1,3)$  ,  $C(-4,4,5)$

1pt 1) Déterminer les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$  puis montrer que ;  $x + 2y + 2z - 14 = 0$  est une  
Equation cartésienne du plan  $(ABC)$

2) Soit  $(S)$  la sphère de centre  $\Omega$  est tangente au plan  $(ABC)$

0,5 pt a) Calculer la distance  $d(\Omega, (ABC))$

0,5pt b) Montrer que ;  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$  est une équation cartésienne de la sphère  $(S)$

0,75pt c) Montrer que le triplet de coordonnées de  $H$  point de contact de la sphère  $(S)$  et le plan  $(ABC)$

Est :  $(0, 3, 4)$

0,5pt d) Montrer que la droite  $(\Omega H)$  coupe la sphère  $(S)$  en deux points à déterminer

EXERCICE 2 (3,5 pts)

0,5pt 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexe  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 6z + 12 = 0$

2) on considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  les points :

$A, B, C$  d'affixes respectivement :  $a = 2\sqrt{3}$  ,  $b = 3 + i\sqrt{3}$  et  $c = \bar{b}$

0,5pt a) Ecrire sous la forme exponentielle le nombre complexe  $b$

0,5pt b) Dédire que :  $a^6 + b^6 = 0$

0,5pt c) Déterminer  $a'$  l'affixe du point  $A'$  image du point  $A$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$

1pt d) Dédire que :  $\arg(ac) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$  et que  $|ac| = 12$  puis déterminer  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

0,5pt e) Déterminer et représenter dans le plan complexe l'ensemble des points  $M(z)$  vérifiant :

$$\frac{z-c}{z-b} \in \mathbb{R}$$

### EXERCICE 3 (3,25 pts)

Une urne contient quatre boules indiscernables au toucher, trois boules rouges portent les numéros : 1, 1, 2 et une boule verte porte le numéro : 2, on tire de l'urne deux boules successivement et avec Remise

1) On considère les deux événements suivants :  $A$  " les boules tirées sont de même couleur "

$B$  " le produit des nombres portés par les deux boules tirées est pair "

1,25pt a) Montrer que :  $p(A) = \frac{5}{8}$  et que  $p(B) = \frac{3}{4}$

0,5 pt b) Sachant que les deux boules tirées sont de la même couleur quelle est la probabilité pour qu'elles Portent des nombres ayant un produit pair

1,5pt 2) Soit  $X$  la variable aléatoire qui relie chaque tirage des deux boules par le nombre des boules vertes Tirées, donner la loi de probabilité de  $X$  et calculer l'espérance mathématique

### EXERCICE 4 (10 pts)

Partie 1 : Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f : x \mapsto (2-x)e^x - 2$

Et soit  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité 2cm)

0,5 pt 1) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$  et interpréter géométriquement le résultat

0,5pt 2)a) Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

0,25pt b) Dédurre que la courbe  $(C)$  admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  et déterminer sa Direction

0,75pt 3)a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = (1-x)e^x$$

0,5pt b) Donner le tableau de variation de  $f$

0,5pt c) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[1, +\infty[$  et que

$$\frac{3}{2} < \alpha < 2 \quad (\text{On admet que } e^{\frac{3}{2}} > 4)$$

0,5pt d) Montrer que :  $y = x$  est une équation cartésienne de la droite  $(T)$  tangente à la courbe  $(C)$

Au point d'abscisse 0

0,75pt 4)a) Etudier la concavité de  $(C)$

0,5pt b) Dédire la position relative de la courbe  $(C)$  et la droite  $(T)$

0,75pt c) Tracer la droite  $(T)$  et la courbe  $(C)$  dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1 pt 5)a) En utilisant une intégration par partie montrer que :  $\int_0^1 (2-x)e^x dx = 2e - 3$

0,5pt b) Dédire l'aire du domaine limité par la courbe  $(C)$  et la droite  $(T)$  et les droites d'équations

$$x=0 \text{ et } x=1$$

Partie 2 : Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g : x \mapsto 2 - 2e^{-x}$

0,5pt 1) Montrer que :  $\left( \forall x \in \left[ \frac{3}{2}, +\infty \right) \right) \quad 0 \leq g'(x) \leq \frac{1}{2}$

0,5pt 2) Montrer que :  $g(\alpha) = \alpha$

3) On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 2 - 2e^{-u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

0,5pt a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{3}{2} \leq u_n \leq \alpha$

0,5pt b) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq \alpha - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\alpha - u_n)$

( Remarquer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \int_{u_n}^{\alpha} g(x) dx = \alpha - u_{n+1}$  )

0,5pt c) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq \alpha - u_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

0,5pt d) Dédire que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite