

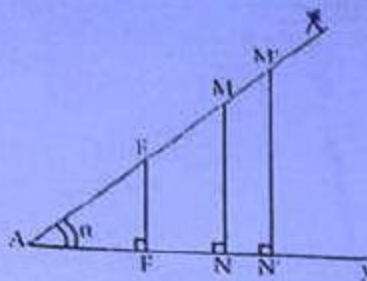
موضوع في بيداغوجيك مادة الرياضيات: (10 نقط)

الجزء الأول:

معتدنا على فحوى الوثيقة التالية:

نشطة تمهيدية

نشاط 1

تكن $\widehat{AEF}$ زاوية حادة.تكن E نقطة من (Ax) و F مسقطها العمودي على المستقيم (Ay)

$$\text{ضع: } \frac{EF}{AF} = h \text{ و } \frac{EF}{AE} = a$$

تكن M و M' نقطتين من (Ax) تختلفان عن A و E.تكن N و N' مسقطيهما العموديين على (Ay) .

$$(1) \text{ بين أن: } \frac{MN}{AM} = \frac{M'N}{AM'} = a$$

العدد a غير مرتبط بوضع E على (Ax) ومسقطها F على (Ay) يسمى جيب α ويرمز له بـ $a = \sin \alpha$

$$(2) \text{ بين أن: } \frac{MN}{AN} = \frac{M'N}{AN'} = b$$

العدد b غير مرتبط بوضع E على (Ax) ومسقطها F على (Ay) يسمى ظل α ويرمز له بـ $b = \tan \alpha$

نشاط 2

لتحديد القياس x لزاوية حادة حيث: $\sin x = 0.456$ وذلك باستعمال المحسبة،تبع الخطوات التالية: $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\sin^{-1}} \boxed{0.456} \boxed{=}$

27.12929416

النتيجة التي تظهر على شاشة المحسبة هي قيمة مقربة لقياس الزاوية x .باستعمال المحسبة حدد قيمة مقربة لكل من a و b و c علماً أن:

$$\tan c = 2$$

$$\tan b = \frac{2}{3}$$

$$\sin a = \frac{1}{4}$$

نشاط 3

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث: $\widehat{ABC} = x$

$$(1) \text{ بين أن: } 0 < \sin x < 1$$

$$(2) \text{ احسب: } (\cos x)^2 + (\sin x)^2$$

$$(3) \text{ بين أن: } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

نشاط 4

ABC مثلث قائم الزاوية في A حيث: $AB = 3, AC = 4, BC = 5$

$$(1) \text{ احسب: } \sin \widehat{ABC} \text{ و } \cos \widehat{ABC} \text{ و } \tan \widehat{ABC}$$

$$(2) \text{ احسب: } \sin \widehat{ACB} \text{ و } \cos \widehat{ACB} \text{ و } \tan \widehat{ACB}$$

(3) ماذا تلاحظ؟

موضوع في مادة الرياضيات: (10 نقط)

EXERCICE 1

Soient $a \in \mathbb{R}$ et une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que :

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Question 1 Pour toute valeur de a la suite (u_n) est :

- (a) croissante. (b) bornée. (c) convergente. (d) décroissante.

Question 2 Si (u_n) admet une limite (finie ou non), alors il est possible que cette limite vaut :

- (a) 1. (b) 0. (c) $\pi/2$. (d) $+\infty$.

Question 3 On pose $\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right)$, alors :

- (a) $\gamma = \frac{1}{6}$. (b) $\gamma = \frac{1}{3}$. (c) $\gamma = -\frac{1}{3}$. (d) $\gamma = -\frac{1}{6}$.

Question 4 On suppose $a = \frac{\pi}{4}$. On déduit de la question précédente que :

- (a) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\gamma}{n}$. (b) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\gamma n}$. (c) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\gamma}{n}}$. (d) $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{\gamma n}}$.

EXERCICE 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application φ_n est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}, \text{ et l'intégrale } I_n = \int_0^1 \varphi_n(x) dx.$$

Question 5 Les valeurs de I_0 et I_1 sont données par :

- (a) $I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$. (b) $I_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = \frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$.
(c) $I_0 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}$. (d) $I_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2}$ et $I_1 = -\frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4}$.

Question 6 La suite (I_n)

- (a) est croissante. (c) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
(b) est décroissante. (d) est convergente.

EXERCICE 3

Soit la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Question 7 Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, alors :

- (a) la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. (c) la suite $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) la suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. (d) pour tout $n \in \mathbb{N} : S_n > 0$.

Question 8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \int_0^1 t^{2k} dt$ de sorte que $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k$, alors :

- (a) $S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$ (c) $S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+1}}{1+t^2} dt.$
 (b) $S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$ (d) $S_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt.$

Question 9 On en déduit que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- (a) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. (c) est convergente de limite égale à $\frac{\pi}{2}$.
 (b) est convergente de limite égale à $\frac{\pi}{4}$. (d) est convergente de limite égale à 1.

EXERCICE 4

Soit $P = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients entiers ($a_i \in \mathbb{Z}$) tel que $a_0 a_n \neq 0$.

Question 10 On suppose que P admet une racine $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$, alors :

- (a) p divise a_0 . (b) a_0 divise q . (c) q divise a_n . (d) a_n divise p .

Question 11 On pose $\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$, on a :

- (a) α est racine du polynôme $8X^3 - 6X + 1$. (c) α est un irrationnel.
 (b) α est racine du polynôme $8X^3 - 6X - 1$. (d) α est racine du polynôme $6X^3 - 8X - 1$.

EXERCICE 5

On considère l'ensemble $\mathbb{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^* \right\}$.

Question 12 On note $\times$ la multiplication dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

- (a) Il existe au moins un élément de $\mathbb{E}$ inversible dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.
 (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{E}, \times)$.
 (c) $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(\mathbb{E}, \times)$.
 (d) $(\mathbb{E}, \times)$ est un groupe commutatif.

EXERCICE 6

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère la transformation σ qui à chaque point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = -3\bar{z} + 4 - 2i.$$

Question 13 σ est alors la composée :

- (a) d'une symétrie axiale et d'une homothétie.
- (b) d'une symétrie axiale et d'une rotation.
- (c) d'une translation et d'une symétrie axiale.
- (d) d'une translation et d'une rotation.

Question 14 Soit C le cercle de centre $I(-1)$ et de rayon 1 et soit $\sigma(C) = C'$, alors :

- (a) C' est le cercle de centre $J(7 - 2i)$ et de rayon 3.
- (b) C' est le cercle de centre $J(7 + 4i)$ et de rayon 3.
- (c) C' est le cercle de centre $J(7 - 2i)$ et qui passe par le point $A(7 + i)$.
- (d) C' est le cercle de centre $J(7 - 4i)$ et qui est tangent à l'axe des abscisses.

EXERCICE 7

On donne trois points A, B et M . On considère les points N milieu de $[AM]$ et P milieu de $[BM]$.

Question 15 On a alors :

- (a) N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.
- (b) N est l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
- (c) P est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{AB}$.
- (d) P est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{AB}$.

EXERCICE 8

Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, on considère un tétraèdre $ABCD$.

Question 16 L'ensemble des points M tels que

$$\|3\vec{MA} + 2\vec{MB}\| = \|2\vec{MC} + 3\vec{MD}\|.$$

- (a) est un singleton. (b) est une droite. (c) est un plan. (d) est une sphère.

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormé et on considère

le plan (P) d'équation $x + y + z = 3$,

$$\text{la droite } (D_1) : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \text{ et la droite } (D_2) : \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}.$$

Question 17 On a alors :

- (a) La droite (D_2) passe par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(1, 1, -2)$.
- (b) La droite (D_2) passe par les points de coordonnées $(1, 1, -1)$ et $(2, 2, 3)$.
- (c) Les deux droites sont non coplanaires, $(D_1) \parallel (P)$ et $(D_2) \parallel (P)$.
- (d) Les deux droites sont non coplanaires, $(D_1) \parallel (P)$ et $(D_2) \perp (P)$.

EXERCICE 9

Dans un espace probabilisé (Ω, T, P) on considère deux événements A et B .

Question 18 On suppose que $P(A) = \frac{1}{5}$ et $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, alors :

- (a) Si les deux événements sont incompatibles alors $P(B) = \frac{1}{10}$.
- (b) Si les deux événements sont indépendants alors $P(B) = \frac{3}{8}$.
- (c) Si A ne peut être réalisé que si l'événement B est réalisé alors $P(B) = \frac{1}{2}$.
- (d) Si B est réalisé alors A est aussi réalisé.

EXERCICE 10

Dans un concours la liste d'attente est constituée de n candidats ($n \geq 4$) ordonnés suivant l'ordre de mérite. Deux amis se trouvent dans cette liste. On considère les deux événements :

A : "Les deux amis soient situés l'un après l'autre"

B : "les deux amis soient séparés par un troisième candidats"

Question 19 La probabilité $P(A)$ est :

- (a) $\frac{1}{n}$. (b) $\frac{2}{n}$. (c) $\frac{2}{n(n-1)}$. (d) $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}$.

Question 20 La probabilité $P(B)$ est :

- (a) $\frac{2}{n(n-1)}$. (b) $\frac{2}{n-1}$. (c) $\frac{2(n-2)}{n(n-1)}$. (d) $\frac{2}{n}$.

Exercise 1

Question 1	On a $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$ Donc $u_0 = a$ et $u_n \leq 1 \quad \forall n \geq 1$ Donc $u_n \leq \max(a , 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Donc (u_n) est bornée	(b)
Question 2	On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ On a $u_{n+1} = \sin(u_n)$ et $x \rightarrow \sin(x)$ continue sur $\mathbb{R}$ Alors $l = \sin(l)$ Donc $l = 0$	(b)
Question 3	On a $\gamma = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2} - \frac{1}{x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{36}} - \frac{1}{x^2}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 - \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{36}\right)} - 1 \right)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(1 + \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{36}\right) - 1 \right)$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{36} \right) = \frac{1}{3}$ $\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ $\frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$	(b)
Question 4	On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} = \gamma$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sin^2(u_n)} - \frac{1}{u_n^2} = \gamma$ Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \gamma$ Donc	

	$\left \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - \gamma \right < \varepsilon \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \left \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} - \gamma \right < \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon$ $\Rightarrow \left \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} - n\gamma \right < n\varepsilon$ $\Rightarrow \left \frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} - n\gamma \right < n\varepsilon$ $\Rightarrow \left \frac{1}{nu_n^2} - \frac{16}{n\pi^2} - \gamma \right < \varepsilon$ Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} - \frac{16}{n\pi^2} - \gamma = 0$ Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \gamma$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}}{u_n} \right)^2 = 1$ Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{n\gamma}}}{u_n} = 1$ Ce qui montre $u_n \sim \sqrt{\frac{1}{n\gamma}}$	d
--	---	---

Exercice 2		
Question 5	On a $I_0 = \int_0^1 (1-x)^0 e^{-2x} dx = \int_0^1 e^{-2x} dx = \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2} \right]$ $I_1 = \int_0^1 (1-x) e^{-2x} dx = \left[-\frac{(1-x)e^{-2x}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2x}}{2} dx = \frac{1}{2} + \left[\frac{e^{-2x}}{4} \right]_0^1$ $= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} e^{-2} - \frac{1}{4}$ $= \left[\frac{1}{4} e^{-2} + \frac{1}{4} \right]$	(b)

- Soit $n \in \mathbb{N}$

On a

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} dx - \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x} dx \\ &= \int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx \end{aligned}$$

Or $0 \leq x \leq 1$ alors $-x(1-x)^n e^{-2x} \leq 0$ donc $\int_0^1 -x(1-x)^n e^{-2x} dx \leq 0$

Donc

$$I_{n+1} \leq I_n$$

Alors (I_n) est décroissante

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(1-x)^n e^{-2x} \geq 0 \text{ donc } \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx \geq 0 \text{ donc } I_n \geq 0$$

Alors (I_n) est décroissante et minorée par 0

D'où (I_n) est convergente

(b)
et
(d)

Exercice 3

- Soit $n \in \mathbb{N}$
On a

$$\begin{aligned}
 S_{2(n+1)} - S_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{2k+1} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\
 &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2(2n+1)+1} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2(2n+2)+1} + \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}} - \cancel{\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{2k+1}} \\
 &= \frac{-1}{4n+3} + \frac{1}{4n+5} \\
 &= \frac{-2}{(4n+3)(4n+5)} < 0
 \end{aligned}$$

Alors

$$S_{2(n+1)} < S_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'où la suite (S_{2n}) est décroissante

- De plus on a

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \underbrace{\frac{1}{3}}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{>0} - \frac{1}{7} + \dots$$

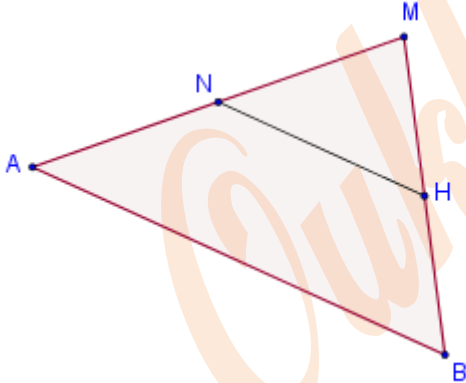
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n > 0$

(b)
Et
(d)

Question 8	• Soit $n \in \mathbb{N}$ on a $ \begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (-1)^k I_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \int_0^1 t^{2k} dt = \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k \times t^{2k} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n (-t^2)^k dt = \int_0^1 \frac{1 - (-t^2)^{n+1}}{1 - (-t^2)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} \times (t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} \times (t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1 - (-1)^{n+1} \times (t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{(t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt \end{aligned} $ Donc $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{(t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt$ $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt + (-1)^n \times \int_0^1 \frac{(t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt$	(b) Et (d)
Question 9	On a $S_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt - (-1)^{n+1} \times \int_0^1 \frac{(t^2)^{n+1}}{1 + t^2} dt$ Or $ \begin{aligned} 0 \leq t \leq 1 &\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1 + t^2} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} \leq t^{2n+2} \\ &\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \leq \int_0^1 t^{2n+2} dt \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt \leq \frac{1}{2n+3} \end{aligned} $ Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1 + t^2} dt = 0$ D'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^2} dt = [\arctan t]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{4}}$	(b)

Exercice 4

Question 10	On suppose que $r = \frac{p}{q}$ est une racine de p alors $P(r) = 0 \Rightarrow a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + \dots + a_1 \frac{p}{q} + a_0 = 0$ $\Rightarrow a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \dots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$ $\Rightarrow a_n p^n = -q(a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 q^{n-1}) \quad \text{et} \quad a_0 q^n = -p(a_n p^{n-1} + \dots + a_1 q^{n-1})$ $\Rightarrow q \text{ divise } a_n p^n \quad \text{et} \quad p \text{ divise } a_0 q^n$ Or $p \wedge q = 1$ alors $p \wedge q^n = 1$ et $p^n \wedge q = 1$ Donc d'après Théorème de Gauss $q \text{ divise } a_n \quad \text{et} \quad p \text{ divise } a_0$	(a) et (c)
si on		
Exercice 5		
Question 12	- Soit $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \in E$, on a $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ Or $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \in E$ Alors $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ est l'élément neutre de $(E, \times)$ ☒ la loi $\times$ associative ☒ $\times$ admet élément neutre ☒ Tout les élément de E est symétrique ☒ la loi $\times$ est commutative Alors $(E, \times)$ est un group commutatif	(c) et (d)
Exercice 6		
Question 13	On a $\sigma(z) = -3\bar{z} + 4 - 2i = f \circ h$ Tel que $f(z) = -3z + 4 - 2i = -3\left(z - 1 + \frac{1}{2}i\right) + 1 - \frac{1}{2}i$ et $g(z) = \bar{z}$ Alors f est une homothétie de centre $\Omega\left(1 - \frac{1}{2}i\right)$ et de rapport -3 Et est une symétrie axiale (Ox) D'où σ est la composition d'une symétrie axiale et d'une homothétie	(a)

Question 14	➡ On a $\sigma(I) = J \Rightarrow z_J = -3\bar{z}_I + 4 - 2i = 7 - 2i$ Donc $J(7-2i)$ Soit $M(z) \in (C)$ alors $\sigma(M) = M' \in (C')$ i.e $z' = -3\bar{z} + 4 - 2i$ Donc $JM = z_J - z' = 7 - 2i + 3\bar{z} - 4 + 2i = 3 + 3\bar{z} = 3 1 + \bar{z} = 3 \overline{1+z} = 3 1+z = 3$ Car $\bar{z} = z$ et $1+z = z - (-1) = IM = 1$ Donc (C') est le cercle de centre $J(7-2i)$ et de rayon 3 ➡ On a $B(-1+i) \in (C)$ alors $A = \sigma(B) \in (C')$ Et on a $z_A = -3\bar{z}_B + 4 - 2i = 7 + i$ alors $A(7+i) \in (C')$ d'où (C') est le cercle de centre $J(7-2i)$ et qui passe par le point $A(7+i)$	(a) et (c)
Question 15	 • On a N milieu de $[AM]$ alors $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AM}$ Alors N est l'image de M homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ • On a $\begin{cases} N \text{ milieu de } [AM] \\ P \text{ milieu de } [BM] \end{cases} \Rightarrow (NP) // (AB) \text{ et } NP = \frac{1}{2} AB$ Donc $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ Alors P est l'image de N par la translation de vecteur $\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$	(a) et (c)
Question 16	On pose $G = \text{bar}(A(3), B(2))$ et $G' = \text{bar}(C(2), D(3))$ Alors $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MG}$ et $2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = 5\overrightarrow{MG}'$ Donc $\ 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\ = \ 2\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}\ \Rightarrow \ 5\overrightarrow{MG}\ = \ 5\overrightarrow{MG}'\ \Rightarrow 5MG = 5MG' \Rightarrow \boxed{MG = MG'}$ Donc l'ensemble des point M est un plan	©

Question 17	- On a $(D_2): \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$ On pose $x = t$ donc $(D_2): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ Alors la droite (D_2) passe par le point de coordonnées $(0, 0, 1)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(1, 1, -2)$ $\vec{n}(1, 1, 1)$ est un vecteur normal au plan (P) $\vec{u}_1(-2, 1, 1)$ est un vecteur directeur de (D_1) $\vec{u}_2(1, 1, -2)$ est un vecteur directeur de (D_2) Or $\vec{u}_1 \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0$ alors $(D_2) // (P)$ et $(D_1) // (P)$ De plus on a $M(1, 1, 2) \in (D_1)$ et $M(1, 1, 2) \notin (P)$ $N(0, 0, 1) \in (D_2)$ et $N(0, 0, 1) \notin (P)$ Alors les deux droites sont non coplanaire , $(D_2) // (P)$ et $(D_1) // (P)$	(a) et (c)
	$P(A) = \frac{2}{n}$	(c)
	$P(B) = \frac{2(n-2)}{n(n-1)}$	©