

# Correction de l'examen national de baccalauréat

## Session normale 2019 science math A et B

### Exercice 1 : Chimie (6,5 points)

Première partie : dosage de l'acide lactique dans un lait

#### 1-Préparation de la solution aqueuse d'hydroxyde de sodium

1-1-Etablissement de l'expression de pH :

D'après le produit ionique de l'eau :  $K_e = [H_3O^+]_{\text{éq}} \cdot [HO^-]_{\text{éq}} \Rightarrow [H_3O^+]_{\text{éq}} = \frac{K_e}{[HO^-]_{\text{éq}}}$

On a :  $pH = -\log[H_3O^+]_{\text{éq}} \Rightarrow pH = -\log\left(\frac{K_e}{[HO^-]_{\text{éq}}}\right)$

L'hydroxyde de sodium se dissocie totalement dans l'eau :  $[HO^-]_{\text{éq}} = C_B$

$$pH = -\log\left(\frac{K_e}{C_B}\right) \Rightarrow pH = \log\left(\frac{C_B}{K_e}\right) \Rightarrow pH = \log C_B - \log K_e \quad (1)$$

1-2-Vérification de la valeur de  $C_B$  :

D'après la relation (1) :  $pH = \log\left(\frac{C_B}{K_e}\right) \Rightarrow \frac{C_B}{K_e} = 10^{pH} \Rightarrow C_B = K_e \cdot 10^{pH}$

A.N :  $C_B = 10^{-14} \cdot 10^{12,70} \Rightarrow C_B = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

#### 2-Contrôle de la qualité d'un lait de vache

2-1-L'équation de la réaction du dosage :



2-2-Etablissement de la relation de  $C_A$  :

Le tableau d'avancement :

L'équation de la réaction		$HA_{(aq)} + HO^-_{(aq)} \rightarrow A^-_{(aq)} + H_2O_{(l)}$			
L'état du système	avancement	Quantités de matière en (mol)			
initial	0	$C_A \cdot V_A$	$C_B \cdot V_{BE}$	0	En excès
intermédiaire	x	$C_A \cdot V_A - x$	$C_B \cdot V_{BE} - x$	x	En excès
équivalence	$x_E$	$C_A \cdot V_A - x_E$	$C_B \cdot V_{BE} - x_E$	$x_E$	En excès

A l'équivalence les deux réactifs HA et  $HO^-$  sont limitants :

$$\begin{cases} C_A \cdot V_A - x_E = 0 \\ C_B \cdot V_{BE} - x_E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_A \cdot V_A = x_E \\ C_B \cdot V_{BE} = x_E \end{cases} \Rightarrow C_A \cdot V_A = C_B \cdot V_{BE} \Rightarrow C_A = \frac{C_B \cdot V_{BE}}{V_A}$$

### 2-3- Etablissement de la relation :

La constante d'acidité :  $K_A = \frac{[A^-]_{\text{éq}} \cdot [H_3O^+]_{\text{éq}}}{[HA]_{\text{éq}}} = 10^{-\text{pH}} \cdot \frac{[A^-]_{\text{éq}}}{[HA]_{\text{éq}}}$

Avant l'équivalence  $0 < V_B < V_{BE}$  le réactif limitant est  $HO^-$  donc :  $x_{\text{max}} = C_B \cdot V_B$

$$[A^-]_{\text{éq}} = \frac{x_{\text{max}}}{V_A + V_B} = \frac{C_B \cdot V_B}{V_A + V_B} ; \quad [HA]_{\text{éq}} = \frac{C_A \cdot V_A - x_{\text{max}}}{V_A + V_B} = \frac{C_B \cdot V_{BE} - C_B \cdot V_B}{V_A + V_B}$$

$$K_A = 10^{-\text{pH}} \cdot \frac{\frac{C_B \cdot V_B}{V_A + V_B}}{\frac{C_B \cdot V_{BE} - C_B \cdot V_B}{V_A + V_B}} = 10^{-\text{pH}} \cdot \frac{V_B}{V_{BE} - V_B}$$

$$V_B \cdot 10^{-\text{pH}} = K_A \cdot (V_{BE} - V_B)$$

#### 2-4-1-Détermination du volume $V_B$ et déduction de $C_A$ :

La courbe  $V_B \cdot 10^{-\text{pH}} = f(V_B)$  est une fonction affine, son équation s'écrit :  $V_B \cdot 10^{-\text{pH}} = aV_B + b$  (2)

a est le coefficient directeur :  $a = \frac{10^{-3} - 0}{4,4 \cdot 10^{-3} - 12,4 \cdot 10^{-3}} = -0,125$

b L'ordonnée à l'origine :  $0 = a \cdot 12,4 \cdot 10^{-3} + b \Rightarrow b = 0,125 \times 12,4 \cdot 10^{-3} = 1,55 \cdot 10^{-5}$

D'après la relation (2) :  $V_B \cdot 10^{-\text{pH}} = aV_B + b \Rightarrow V_B \cdot 10^{-\text{pH}} = K_A \cdot V_{BE} - K_A \cdot V_B$  (3)

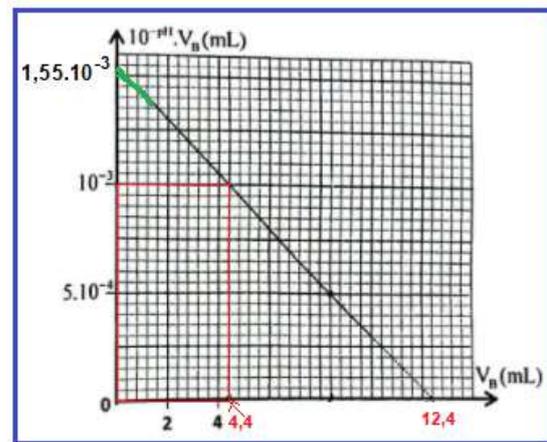
En comparant les relations (1) et (2) on écrit :

$$\begin{cases} a = -K_A \\ b = K_A \cdot V_{BE} \end{cases} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{K_A \cdot V_{BE}}{-K_A} = -V_{BE}$$

$$V_{BE} = -\frac{b}{a}$$

$$V_{BE} = -\frac{-1,55 \cdot 10^{-5}}{-0,125} = 12,4 \cdot 10^{-3} \text{ L}$$

$$V_{BE} = 12,4 \text{ mL}$$



Déduction de  $C_B$  :

$$C_A = \frac{C_B \cdot V_{BE}}{V_A} \Rightarrow C_A = \frac{5 \cdot 10^{-2} \times 12,4}{25} \Rightarrow C_A = 2,48 \cdot 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

#### 2-4-2-Détermination de $\text{p}K_A$ :

On a :  $a = -K_A \Rightarrow K_A = -a$

$$\text{p}K_A = -\log K_A = -\log(-a)$$

$$\text{p}K_A = -\log(1,55 \cdot 10^{-5}) \Rightarrow \text{p}K_A = 3,90$$

## 2-5- Le lait étudié est-il frais ?

$$C_A \cdot V = \frac{m}{M} \Rightarrow m = C_A \cdot M \cdot V$$

$$m = 2,48 \cdot 10^{-2} \times 90 \times 1 = 2,23 \text{ g}$$

On a :

$$\begin{cases} 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ g} \rightarrow 1^\circ\text{D} \\ 2,23 \text{ g} \rightarrow x^\circ\text{D} \end{cases} \Rightarrow x^\circ\text{D} = 22,32^\circ\text{D}$$

On remarque  $22,32^\circ\text{D} > 18^\circ\text{D}$ , donc le lait étudié n'est pas frais.

## Deuxième partie : Pile chrome-argent

### 1- L'équation bilan Lors du fonctionnement de la pile :

Au niveau de l'anode se produit l'oxydation de chrome :  $\text{Cr}_{(s)} \rightleftharpoons \text{Cr}_{(aq)}^{3+} + 3e^-$

Au niveau de la cathode se produit la réduction des ions  $\text{Ag}^+$  :  $3 \times (\text{Ag}_{(aq)}^+ + e^- \rightleftharpoons \text{Ag}_{(s)})$

L'équation bilan :  $3\text{Ag}_{(aq)}^+ + \text{Cr}_{(s)} \rightarrow \text{Cr}_{(aq)}^{3+} + 3\text{Ag}_{(s)}$

### 2- L'avancement à $t_1$ :

Le tableau d'avancement :

Etat du système	$3\text{Ag}_{(aq)}^+$	$+ \text{Cr}_{(s)}$	$\rightarrow$	$\text{Cr}_{(aq)}^{3+}$	$+ 3\text{Ag}_{(s)}$	Quantité d'é
Initial	$C_1 \cdot V$	$n_1(\text{Cr})$		$C_2 \cdot V$	$n_1(\text{Ag})$	$n(e^-) = 0$
Pendant la durée $t_1$	$C_1 \cdot V - 3x$	$n_1(\text{Cr}) - x$		$C_1 \cdot V + x$	$n_1(\text{Ag}) + 3x$	$n(e^-) = 3x$

La variation de la masse de l'électrode de chrome est  $\Delta m(\text{Cr})$  :

$$\begin{cases} \Delta n(\text{Cr}) = -x \\ \Delta n(\text{Cr}) = \frac{\Delta m(\text{Cr})}{M(\text{Cr})} \end{cases} \Rightarrow \frac{\Delta m(\text{Cr})}{M(\text{Cr})} = -x \Rightarrow x = \frac{|\Delta m(\text{Cr})|}{M(\text{Cr})} \Rightarrow x = \frac{52 \cdot 10^{-3}}{52} = 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

### 3- La concentration des ions $\text{Cr}^{3+}$ à $t_1$ :

$$[\text{Cr}^{3+}] = \frac{n(\text{Cr}^{3+})}{V} = \frac{C_1 \cdot V + x}{V} \Rightarrow [\text{Cr}^{3+}] = C_1 + \frac{x}{V} \Rightarrow [\text{Cr}^{3+}] = 0,1 + \frac{10^{-3}}{0,1} = 0,11 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

### 4- La valeur de $t_1$ :

$$\begin{cases} Q = n(e^-) \cdot F \\ Q = I_0 \cdot t_1 \end{cases} \Rightarrow I_0 \cdot t_1 = n(e^-) \cdot F \Rightarrow t_1 = \frac{n(e^-) \cdot F}{I_0} \Rightarrow t_1 = \frac{3x \cdot F}{I_0}$$

$$t_1 = \frac{3 \times 10^{-3} \times 96500}{50 \cdot 10^{-3}} = 5,79 \cdot 10^3 \text{ s} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ h } 36 \text{ min } 30 \text{ s}$$

## Exercice 2 : Ondes (2,5 points)-Transformation nucléaires (2,25 points)

### I – Diffraction de la lumière

#### 1- Le nombre d'affirmations fausses :

4-affirmations fausses.

#### 2-1- L'expression de $\theta$ :

D'après la figure ci-contre :  $\tan\theta = \frac{X}{2D}$

L'écart angulaire est très petit, on écrit :

$$\tan\theta \approx \theta \quad \text{Donc : } \theta = \frac{X}{2D} \quad (1)$$

#### 2-2- Montrons que le rapport $\frac{\lambda}{D}$ est constant :

L'expression de L'écart angulaire  $\theta$  :  $\theta = \frac{\lambda}{a}$  (2)

D'après (1) et (2) :  $\frac{\lambda}{a} = \frac{X}{2D}$  on écrit :  $\frac{\lambda}{X} = \frac{a}{2D}$

$$\begin{cases} a = \text{cte} \\ D = \text{cte} \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda}{X} = \text{cte}$$

Déduction de  $\lambda_2$  :

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{a}{2D} \cdot X_2 \\ \lambda_1 = \frac{a}{2D} \cdot X_1 \end{cases} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\frac{a}{2D} \cdot X_2}{\frac{a}{2D} \cdot X_1} \Rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{X_2}{X_1} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{X_2}{X_1} \cdot \lambda_1$$

$$\lambda_2 = \frac{5,4 \text{ cm}}{6,0 \text{ cm}} \times 632,8 \text{ nm} \Rightarrow \lambda_2 = 569,5 \text{ nm}$$

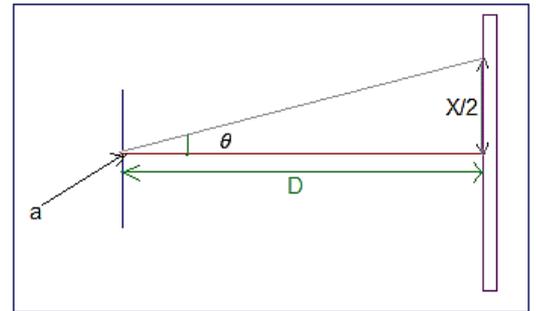
#### 3- Interprétation de l'aspect observé :

Puisque la lumière blanche est polychromatique est la  $\theta = \frac{\lambda}{a}$  donc les différentes longueurs d'onde qui constitues la lumière blanche vont être diffractés à des ongles différentes : sur l'écran on observe une tache blanche au milieu car tous les longueurs d'onde qui constitues la lumière blanche se retrouve dans la tache centrale.

#### 4- Calcul de $\lambda_R$ et $v_R$ :

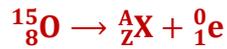
$$\text{On a : } n = \frac{\lambda_1}{\lambda_R} \Rightarrow \lambda_R = \frac{\lambda_1}{n} \quad \text{A. N : } \lambda_R = \frac{632,8}{1,5} \Rightarrow \lambda_R = 421,86 \text{ nm}$$

$$\text{On a : } n = \frac{c}{v} \Rightarrow v = \frac{c}{n} \quad \text{A. N : } v = \frac{3 \cdot 10^8}{1,5} \Rightarrow v = 2 \cdot 10^8 \text{ m. s}^{-1}$$



## II – Désintégration de l'oxygène 15

1- L'équation de désintégration de  $^{15}_8\text{O}$  :



D'après les lois de Soddy :

$$\begin{cases} 15 = A + 0 \\ 8 = Z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 15 \\ Z = 8 - 1 = 7 \end{cases}$$



2- Détermination de  $|\Delta E|$  :

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2 \Rightarrow \Delta E = [m(^A_Z\text{X}) + m(^0_1\text{e}) - m(^{15}_8\text{O})] \cdot c^2$$

$$\Delta E = (15,000109 + 5,486 \cdot 10^{-4} - 15,00) \text{u} \cdot c^2 = -2,4084 \times 931,5 \text{MeV} \cdot c^{-2} \cdot c^2$$

$$|\Delta E| = 2,2434 \text{ Mev}$$

3- La portion de molécules d'eau dans l'injection :

$$p = \frac{N_0}{N}$$

$N_0$  : Le nombre de molécules d'eau qui contient  $^{15}_8\text{O}$ .

$N$  : Le nombre total des molécules d'eau.

$$\frac{N}{N_A} = \frac{m}{M(\text{H}_2\text{O})} \Rightarrow N = \frac{m}{M(\text{H}_2\text{O})} \cdot N_A$$

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho \cdot V \Rightarrow m = \frac{\rho \cdot V}{M(\text{H}_2\text{O})} \cdot N_A$$

On a :  $a_0 = \lambda \cdot N_0$  avec :  $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$

$$N_0 = \frac{a_0}{\lambda} = \frac{a_0 \cdot t_{1/2}}{\ln 2}$$

$$p = \frac{a_0 \cdot t_{1/2}}{\ln 2} \cdot \frac{M(\text{H}_2\text{O})}{\rho \cdot V \cdot N_A}$$

$$p = \frac{3,7 \cdot 10^7 \times 122 \times 18}{\ln 2 \cdot 6,022 \cdot 10^{23} \times 1 \times 5} = 3,89 \cdot 10^{-14} \Rightarrow p = 3,89 \cdot 10^{-16} \%$$

4- Justification par calcul :

D'après la loi de désintégration radioactive :

$$a(t_1) = a_0 \cdot e^{-\lambda t_1} \Rightarrow \frac{a(t_1)}{a_0} = e^{-\lambda t_1} \Rightarrow -\lambda \cdot t_1 = \ln \left( \frac{a(t_1)}{a_0} \right) \Rightarrow t_1 = -\frac{t_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \left( \frac{a(t_1)}{a_0} \right)$$

$$t_1 = -\frac{122}{\ln 2} \cdot \ln\left(\frac{0,15}{100}\right) = 1144,46 \text{ s} \Rightarrow t_1 \approx 19 \text{ min}$$

Donc à l'instant  $t = 20 \text{ min}$ , on peut faire une nouvelle injection.

### Exercice 3 : Electricité (5,5 points)

#### 1-Charge du condensateur

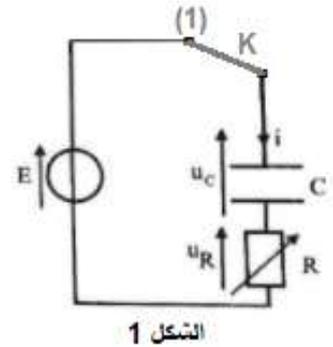
##### 1-1- L'équation différentielle vérifiée par $q(t)$ :

D'après la loi d'additivité des tensions et la loi d'ohm :

$$u_R + u_C = E \Rightarrow R_0 \cdot C \cdot i(t) + C \cdot u_C = C \cdot E$$

$$R_0 \cdot C \cdot \frac{dq(t)}{dt} + q(t) = C \cdot E$$

$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{R_0 \cdot C} \cdot q(t) = \frac{E}{R_0}$$



##### 1-2- En se basant sur le graphe de la figure 2 :

L'équation de la courbe :  $i(t) = a \cdot t + b$

D'après l'équation différentielle l'expression de  $i(t)$  s'écrit :  $i(t) = -\frac{1}{R_0 \cdot C} \cdot q(t) + \frac{E}{R_0}$  (2)

On comparant (1) et (2), on a le coefficient directeur :  $a =$

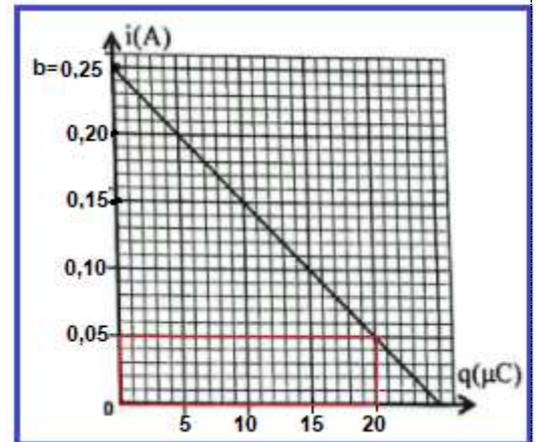
$$-\frac{1}{R_0 \cdot C} = -\frac{1}{\tau}$$

et  $b$  l'ordonnée à l'origine :  $b = \frac{E}{R_0}$

##### 1-2-1- La valeur de $E$ :

$b = \frac{E}{R_0} \Rightarrow E = b \cdot R_0$  graphiquement on trouve :  $b = 0,25 \text{ A}$

$$E = 0,25 \times 40 = 10 \text{ V}$$



##### 1-2-2- La valeur de $\tau$ :

$$a = -\frac{1}{\tau} \Rightarrow \tau = -\frac{1}{a}$$

$$a = \frac{\Delta i}{\Delta q} = \frac{0,25 - 0,05}{0 - 20 \cdot 10^{-6}} = -10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

$$\tau = 10^{-4} \text{ s}$$

### 1-3- Vérification de la valeur de C :

$$\tau = R_0 \cdot C \Rightarrow C = \frac{\tau}{R_0}$$

$$C = \frac{10^{-4}}{40} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ F} \Rightarrow C = 2,5 \mu\text{F}$$

## 2- Décharge du condensateur dans la bobine

### 2-1-1- L'équation différentielle vérifiée par q(t):

D'après la loi d'additivité des tensions :

$$u_C + u_R + u_L = 0$$

$$C \cdot u_C + R_1 \cdot C \cdot i(t) + r \cdot C \cdot i(t) + L \cdot C \cdot \frac{di}{dt} = 0$$

$$q(t) + (R_1 + r) \cdot C \cdot \frac{dq(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} = 0$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{R_1 + r}{C}\right)}_{=A} \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{L \cdot C}}_{=B} \cdot q(t) = 0$$

On pose :  $A = \frac{R_1 + r}{C}$  et  $B = \frac{1}{L \cdot C}$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + A \cdot \frac{dq(t)}{dt} + B \cdot q(t) = 0$$

### 2-1-2- La valeur de $u_L$ la tension aux bornes de la bobine :

A  $t=0$  l'instant où K est en la position (2) :

$$u_C(0) + u_R(0) + u_L(0) = 0$$

$$u_R(0) = R_1 \cdot \underbrace{i(0)}_{=0} = 0, \quad u_C(0) = E$$

$$u_L(0) = -u_C(0) = -E \Rightarrow u_L(0) = -10 \text{ V}$$

### 2-1-3- Vérifions que $L = 1,0\text{H}$ :

On a :  $T_0 = 2\pi\sqrt{L \cdot C}$

$$T_0^2 = 4\pi^2 L \cdot C \Leftrightarrow L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 \cdot C}$$

Graphiquement :  $T = 10 \text{ ms}$ , sachant que  $T = T_0$  :

$$L = \frac{(10 \cdot 10^{-3})^2}{4 \times 10 \times 2,5 \cdot 10^{-6}} \Rightarrow L = 1,0 \text{ H}$$

#### 2-1-4- L'énergie dissipée par effet Joule :

On a : 
$$\Delta E_T = E_T(t_1) - E_T(t = 0)$$

A l'instant  $t_1$  :

$$E_T(t_1) = E_m(t_1) + E_e(t_1) = \frac{1}{2}L \cdot i_1^2 + \frac{1}{2C} \cdot q_1^2$$

Graphiquement on a :  $q_1 = q_{1\min} = -1,5 \times 10^{-6} = -15 \mu\text{C} \Rightarrow E_e(t_1)$  maximale et  $i_1 = 0 \Rightarrow E_m(t_1) = 0$

$$E_{T1} = \frac{1}{2C} \cdot q_1^2$$

A l'instant  $t = 0$  :

Graphiquement on a :  $q_0 = q_{0\max} = 2,5 \times 10^{-6} = 25 \mu\text{C} \Rightarrow E_e(t = 0)$  maximale et  $i_0 = 0 \Rightarrow E_m(t = 0) = 0$

$$E_{T0} = \frac{1}{2C} \cdot q_0^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{2C} \cdot q_1^2 - \frac{1}{2C} \cdot q_0^2 \Rightarrow \Delta E = \frac{1}{2C} \cdot (q_1^2 - q_0^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2 \times 2,5 \cdot 10^{-6}} \times [(-15 \cdot 10^{-6})^2 - (25 \cdot 10^{-6})^2] = -8 \cdot 10^{-5} \text{ J} = -80 \mu\text{J}$$

$$\Delta E = -80 \mu\text{J}$$

#### 2-2- La valeur minimale de R :

On a : 
$$A > 2\sqrt{B}$$

$$\frac{R+r}{L} > 2\sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \Rightarrow R_T > 2L \cdot \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \Rightarrow R_T > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R_T > R_C$$

On a : 
$$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$[R_C] = \left(\frac{[L]}{[C]}\right)^{1/2}$$

$$[L] = \frac{[U] \cdot [t]}{[I]} ; [C] = \frac{[I] \cdot [t]}{[U]}$$

$$[R_C] = \left(\frac{[U]^2}{[I]^2}\right)^{1/2} = \frac{[U]}{[I]} \Rightarrow [R_C] = [R]$$

$R_C$  à les dimensions de la résistance.

- La valeur minimale de R :

$$R_T > R_C \Rightarrow R + r > R_C \Rightarrow R > R_C - r \Rightarrow R > 2 \sqrt{\frac{L}{R}} - r \Rightarrow R_{\min} = 2 \sqrt{\frac{L}{R}} - r$$

$$R_{\min} = 2 \sqrt{\frac{1}{R = 2,5 \cdot 10^{-6}}} - 12 = 1252,91 \Omega \Rightarrow R_{\min} = R \approx 1253 \Omega$$

### 3- Les oscillations électriques forcées dans un circuit RLC série

3-1- L'intensité du courant indiquée par l'ampèremètre :

On a :  $Z = \frac{U}{I_{\text{eff}}} \Rightarrow I_{\text{eff}} = \frac{U}{Z}$  et  $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_m}{Z\sqrt{2}}$$

Graphiquement :  $U_m = 3V$

A. N :  $I_{\text{eff}} = \frac{3}{390,4\sqrt{2}} = 5,43 \cdot 10^{-3} A \Rightarrow I_{\text{eff}} = 5,43 \text{ mA}$

3-2- Calcul de la valeur de  $R_2$  :

$$U_{Rm} = R_2 \cdot I_m \Rightarrow R_2 = \frac{U_{Rm}}{I_m} \Rightarrow R_2 = \frac{U_{Rm}}{I_{\text{eff}} \cdot \sqrt{2}}$$

$$R_2 = \frac{2}{5,43 \cdot 10^{-3} \times \sqrt{2}} = 260,44 \Omega \Rightarrow R_2 \approx 260 \Omega$$

3-3- L'expression numérique de la tension  $u(t)$  :

Graphiquement :  $\begin{cases} T = 4 \times 2\text{ms} = 8 \text{ ms} \Rightarrow N = \frac{1}{T} = \frac{1}{8 \cdot 10^{-3}} = 125 \text{ Hz} \\ U_m = 3 \text{ V} \end{cases}$

$$|\varphi| = \frac{2\pi}{T} \cdot \tau = \frac{2\pi}{8} \times 1 = \frac{\pi}{4}$$

La tension  $u(t)$  est en avance de phase par rapport à l'intensité du courant  $i(t)$  :  $\varphi > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$

$$u(t) = U_m \cdot \cos(2\pi N \cdot t + \varphi) \Rightarrow u(t) = 3 \cdot \cos\left(250\pi \cdot t + \frac{\pi}{4}\right)$$

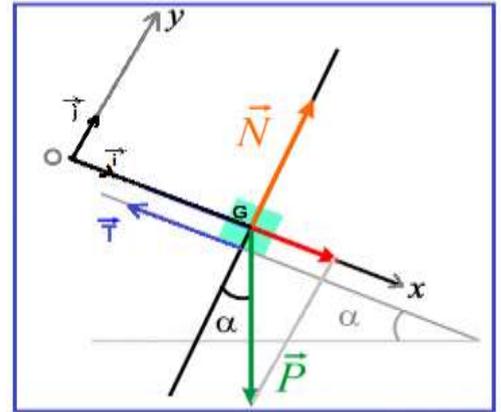
## Exercice 4 : Mécanique (3,25 points)

### Partie I : Etude du mouvement d'un skieur

#### 1- Première cas : Mouvement du skieur sans frottement

### 1-1- L'expression de $a_G$ :

- Système étudié : {Système (S)}
- Bilan des forces :
  - $\vec{P}$  : son poids
  - $\vec{R}$  : action de la piste tel que :  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ 
    - $\vec{N}$  : la composante normale du plan incliné
    - $\vec{T}$  : la composante tangentielle du plan incliné
    - Application de la deuxième loi de Newton, dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  lié à un référentiel terrestre supposé galiléen.



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G$$

- Projection sur  $Ox$  :

$$P_x + 0 + T_x = m \cdot a_x \Rightarrow P \cdot \sin\alpha - T = m \cdot a_G \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin\alpha - T = m \cdot a_G$$

$$a_G = g \cdot \sin\alpha - \frac{T}{m}$$

- Projection sur  $Oy$  :

$$P_y + N_y = m \cdot a_y \Rightarrow -P \cdot \cos\alpha + N = 0 \Rightarrow N = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

On a :  $k = \frac{T}{N} \Rightarrow T = k \cdot N$

$$a_G = g \cdot \sin\alpha - \frac{T}{m} \Rightarrow a_G = g \cdot \sin\alpha - \frac{k \cdot N}{m} \Rightarrow a_G = g \cdot \sin\alpha - \frac{k \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha}{m}$$

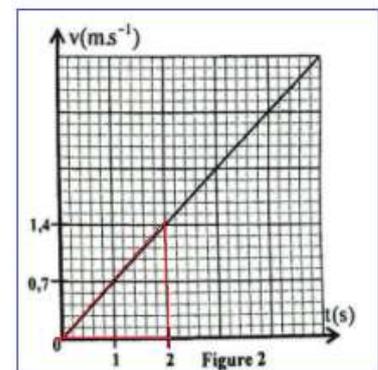
$$a_G = g \cdot \sin\alpha - k \cdot g \cdot \cos\alpha \Rightarrow a_G = g \cdot (\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha)$$

### 1-2- La détermination graphique de $a_G$ :

La courbe  $v = f(t)$  est une fonction linéaire, son équation s'écrit :

$v = a_G \cdot t$  avec  $a_G$  est le coefficient directeur :

$$a_G = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a_G = \frac{1,4 - 0}{2 - 0} \Rightarrow a_G = 0,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$



### 1-3- Vérification de la valeur de $k$ :

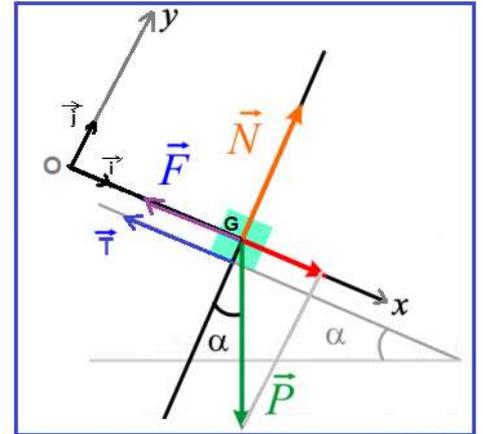
$$a_G = g \cdot (\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha) \Rightarrow \frac{a_G}{g} = \sin\alpha - k \cdot \cos\alpha \Rightarrow k \cdot \cos\alpha = \sin\alpha - \frac{a_G}{g}$$

$$k = \frac{1}{\cos\alpha} \left( \sin\alpha - \frac{a_G}{g} \right) \xrightarrow{\text{avec}} k = \frac{1}{\cos(45^\circ)} \left( \sin(45^\circ) - \frac{0,7}{10} \right) \Rightarrow k = 0,9$$

## Deuxième cas : Mouvement du skieur avec frottement fluide

### 2-1- L'équation différentielle :

- Système étudié : {Système (S)}
- Bilan des forces :
  - $\vec{P}$  : son poids
  - $\vec{R}$  : action de la piste tel que :  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ 
    - $\vec{N}$  : la composante normale du plan incliné
    - $\vec{T}$  : la composante tangentielle du plan incliné
  - $\vec{F}$  : force de frottement fluide tel que  $\vec{F} = -\lambda \cdot \vec{v}$  son intensité :  $F = \lambda \cdot v$
- Application de la deuxième loi de Newton, dans le repère  $(0, \vec{i}, \vec{j})$  lié à un référentiel terrestre supposé galiléen :



$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$$

- Projection sur  $Ox$  :

$$P_x + 0 + T_x + F_x = m \cdot a_x \Rightarrow P \cdot \sin\alpha - T - \lambda \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt} \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin\alpha - T - \lambda \cdot v = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$g \cdot \sin\alpha - \frac{T}{m} - \frac{\lambda}{m} \cdot v = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} \cdot v + \frac{T}{m} - g \cdot \sin\alpha = 0$$

On pose :  $A = \frac{\lambda}{m}$  et  $B = \frac{T}{m} - g \cdot \sin\alpha \Rightarrow$  L'équation différentielle s'écrit :  $\frac{dv}{dt} + A \cdot v + B = 0$

### 2-2- La valeur de la vitesse limite $v_\ell$ :

En régime permanent on a :  $v_\ell = \text{cte} \Rightarrow \frac{dv_\ell}{dt} = 0$

$$0 + A \cdot v_\ell + B = 0 \Rightarrow v_\ell = -\frac{B}{A} \Rightarrow v_\ell = -\frac{\frac{T}{m} - g \cdot \sin\alpha}{\frac{\lambda}{m}} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha - T}{\lambda} = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha - k \cdot N}{\lambda}$$

$$v_\ell = \frac{m \cdot g \cdot \sin\alpha - k \cdot m \cdot g \cdot \cos\alpha}{\lambda} \Rightarrow v_\ell = m \cdot g \cdot \frac{\sin\alpha - k \cdot \cos\alpha}{\lambda}$$

$$v_\ell = 75 \times 10 \times \frac{\sin(45^\circ) - 0,9 \times \cos(45^\circ)}{5} \Rightarrow v_\ell = 10,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

### 2-3- La valeur de $v_2$ :

La méthode d'Euler :  $v_2 = a_1 \cdot \Delta t + v_1$

D'après l'équation différentielle :  $\frac{dv}{dt} + A \cdot v + B = 0 \Rightarrow a_1 = -B - A \cdot v_1$

$$v_2 = (-B - A.v_1). \Delta t + v_1$$

$$v_2 = (-(-0,71) - 0,067 \times 6,30) \times 1,40 + 6,30 \Rightarrow v_2 = 6,70 \text{ m.s}^{-1}$$

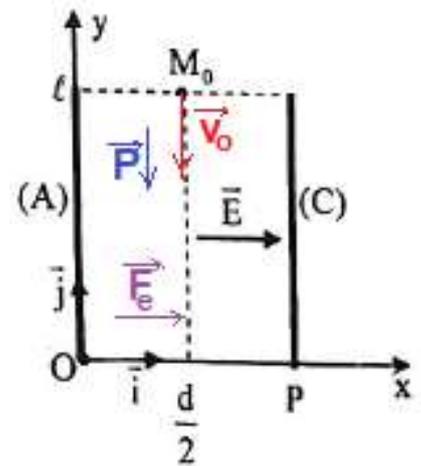
## Partie II : Mouvement d'une sphère chargée dans le champ de pesanteur et dans un champ électrique

### 1- Les équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$ :

- Système étudié : {la sphère (S)}
- Bilan des forces :
  - $\vec{P}$  : son poids, tel que :  $\vec{P} = m. \vec{g}$
  - $\vec{F}$  : force électrostatique, tel que :  $\vec{F} = q. \vec{E}$
- Application de la deuxième loi de Newton, dans le repère  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$  lié à un référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \vec{F} = m. \vec{a}_G \Rightarrow \vec{F} + \vec{P} = m. \vec{a}_G \Rightarrow q. \vec{E} + m. \vec{g} = m. \vec{a}_G$$

$$\vec{a}_G = \vec{g} + \frac{q}{m}. \vec{E}$$



D'après les conditions initiales :

$$\vec{E} \begin{cases} E_x = E \rightarrow (\vec{E} \parallel \vec{Ox}) \\ E_y = 0 \rightarrow (\vec{E} \perp \vec{Oy}) \end{cases} ; \vec{g} \begin{cases} g_x = 0 \rightarrow (\vec{g} \perp \vec{Ox}) \\ g_y = -g \rightarrow (\vec{E} \parallel \vec{Oy}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = v_{0x} = 0 \\ C_2 = v_{0y} = 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} C_3 = x_0 = \frac{d}{2} \\ C_4 = y_0 = \ell \end{cases}$$

- Projection de la relation vectorielle sur l'axe  $Ox$  et  $Oy$  :

$$\vec{a}_G \begin{cases} a_x = g_x + \frac{q}{m}. E_x \\ a_y = g_y + \frac{q}{m}. E_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d v_x}{dt} = \frac{q}{m}. E \\ \frac{d v_y}{dt} = -g \end{cases} \xrightarrow{\text{intégration}} \vec{v}_G \begin{cases} v_x = \frac{q}{m} E. t + C_1 \\ v_y = -g. t + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = \frac{q}{m} E. t \\ v_y = -g. t \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{q}{m} E. t \\ \frac{dy}{dt} = -g. t \end{cases} \xrightarrow{\text{intégration}} \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E. t^2 + C_3 \\ y(t) = -\frac{1}{2} g. t^2 + C_4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \frac{q}{m} E. t^2 + \frac{d}{2} \\ y(t) = -\frac{1}{2} g. t^2 + \ell \end{cases}$$

On a :  $E = \frac{U_0}{d}$  et  $\alpha = \frac{q}{m}$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \alpha \frac{U_0}{d}. t^2 + \frac{d}{2} \\ y(t) = -\frac{1}{2} g. t^2 + \ell \end{cases}$$

$$\text{A. N: } \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2} \cdot 10^{-6} \cdot \frac{U_0}{4 \cdot 10^{-2}} \cdot t^2 + \frac{4 \cdot 10^{-2}}{2} \\ y(t) = -\frac{1}{2} \times 10 \cdot t^2 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0 \cdot t^2 + 2 \cdot 10^{-2} \\ y(t) = -5 \cdot t^2 + 1 \end{cases}$$

## 2- L'équation de la trajectoire :

On élimine le temps des deux équations horaires  $x(t)$  et  $y(t)$  :

$$x = 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0 \cdot t^2 + 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow 1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0 \cdot t^2 = x - 2 \cdot 10^{-2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x - 2 \cdot 10^{-2}}{1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0}}$$

$$y = -5 \cdot t^2 + 1 \Rightarrow y = -5 \cdot \frac{x - 2 \cdot 10^{-2}}{1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0} + 1$$

$$y = -\frac{5}{1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0} \cdot x + \frac{5 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{1,25 \cdot 10^{-5} \cdot U_0} + 1 \Rightarrow y = -\frac{4 \cdot 10^5}{U_0} \cdot x + \frac{8 \cdot 10^3}{U_0} + 1$$

## 3- Montrons que $U_0 = 8 \text{ kV}$ :

Au point P on a :  $P(x_P = d, y_P = 0)$

$$0 = -\frac{4 \cdot 10^5}{U_0} \cdot x_P + \frac{8 \cdot 10^3}{U_0} + 1 \Rightarrow \frac{4 \cdot 10^5}{U_0} \cdot x_P - \frac{8 \cdot 10^3}{U_0} = 1 \Rightarrow 4 \cdot 10^5 \cdot x_P - 8 \cdot 10^3 = U_0$$

$$U_0 = 4 \cdot 10^5 \cdot d - 8 \cdot 10^3 \Rightarrow U_0 = 4 \cdot 10^5 \times 4 \cdot 10^{-2} - 8 \cdot 10^3 = 8 \cdot 10^3 \text{ V}$$

$$U_0 = 8 \text{ kV}$$