

Exercice 1 :(S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ ; (P):  $y - z = 0$ 1) a) Montrer que le centre de (S) est  $\Omega(1, 1, 1)$  et pour rayon 2.(S) :  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z - 1 = 0$ 

$$\mathbf{a} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{b} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{c} = \frac{-2}{-2}; \quad \mathbf{d} = -1$$

Donc  $\mathbf{a} = 1$ ;  $\mathbf{b} = 1$ ;  $\mathbf{c} = 1$ ;  $\mathbf{d} = -1$ 

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - \mathbf{d} = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1 = 4 > 0$$

Donc le centre de (S) est  $\Omega(1;1;1)$  et  $\mathbf{R} = \sqrt{4} = 2$ D'où  $\Omega(1;1;1)$  et  $\mathbf{R} = 2$ b) Calculer  $\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{P}))$  et en déduire que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (C).

$$\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{P})) = \frac{|1-1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 \quad \text{donc } \Omega \in (\mathbf{P})$$

 $\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{P})) = 0$  et  $\mathbf{R} = 2$  Donc  $\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{P})) < \mathbf{R}$ D'où le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C)  
c – Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).Puisque  $\mathbf{d}(\Omega, (\mathbf{P})) = 0$  le plan (P) coupe la sphère selon le grand cercle de centre  $\Omega(1;1;1)$  et de rayon  $\mathbf{R} = 2$ .2) Soit ( $\Delta$ ) la droite passant par le point A(1 ; -2 ; 2) et orthogonal au plan (P)a) Montrer que  $\vec{\mathbf{u}}(0, 1, -1)$  est un vecteur directeur de la droite ( $\Delta$ ).On a ( $\Delta$ ) est orthogonal au (P) et  $\vec{\mathbf{u}}(0, 1, -1)$  est un vecteur normal au plan (P) donc un vecteur directeur de ( $\Delta$ )b) Montrer que  $\|\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{2} \|\vec{\mathbf{u}}\|$  et en déduire que la droite ( $\Delta$ ) coupe la sphère (S) en deux points.

$$\vec{\Omega\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{u}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{j}} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \vec{\mathbf{k}} = 2\vec{\mathbf{i}}$$

$$\|\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{2^2} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{2} \|\vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$\text{D'où} \quad \|\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{2} \|\vec{\mathbf{u}}\|.$$

$$\text{On a} \quad \|\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\| = \sqrt{2} \|\vec{\mathbf{u}}\| \quad \text{donc} \quad \frac{\|\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\|}{\|\vec{\mathbf{u}}\|} = \sqrt{2}$$

$$\text{on sait que} \quad \mathbf{d}(\Omega; (\Delta)) = \frac{\|\vec{\Omega\mathbf{A}} \wedge \vec{\mathbf{u}}\|}{\|\vec{\mathbf{u}}\|} \quad \text{donc} \quad \mathbf{d}(\Omega; (\Delta)) = \sqrt{2}$$

Donc  $\mathbf{d}(\Omega; (\Delta)) = \sqrt{2}$  et  $\mathbf{R} = 2$  donc  $\mathbf{d}(\Omega; (\Delta)) < \mathbf{R}$ D'où la droite ( $\Delta$ ) coupe la sphère (S) en deux points.c) Déterminer les coordonnées de chaque point d'intersection de la droite ( $\Delta$ ) et de la sphère (S)

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + t \\ z = 2 - t \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 2^2 \\ (1-1)^2 + (-2+t-1)^2 + (2-t-1)^2 = 4^2 \\ \Leftrightarrow (t-3)^2 + (1-t)^2 = 4^2 \\ \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 + t^2 - 2t + 1 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow 2t^2 - 8t + 6 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 3 = 0 \\ \text{donc } \Delta = 4 \quad \text{donc } t = 1 \text{ ou } t = 3 \end{cases}$$

$$\text{Si } t = 1 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 1 = -1 \\ z = 2 - 1 = 1 \end{cases} \quad \text{si } t = 3 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 + 3 = 1 \\ z = 2 - 3 = -1 \end{cases}$$

d'où  $(\Delta) \cap (S) = \{\mathbf{E}(1; -1; 1); \mathbf{F}(1; 1; -1)\}$ Exercice 2 :Un sac contient 10 boules, indiscernables au toucher.  
5 boules blanches, 3 boules rouges et 2 boules vertes1) Montrer que  $\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{8}{15}$  et  $\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{19}{70}$ 

5 B ; 3 R ; 2 V

On tire simultanément et au hasard 4 boules du sac

$$\mathbf{Card}(\Omega) = \mathbf{C}_{10}^4 = 210$$

A " parmi les 4 boules tirées une boule exactement est verte "

$$2(\mathbf{V}) \quad 8(\bar{\mathbf{V}})$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{A}) = \mathbf{C}_2^1 \times \mathbf{C}_8^3 = 2 \times 56 = 112$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{A})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{112}{210} = \frac{8}{15}$$

B " parmi les 4 boules tirées trois boules sont exactement de même couleur "

$$5(\mathbf{B}) \quad 5(\bar{\mathbf{B}}) \quad 3(\mathbf{R}) \quad 7(\bar{\mathbf{R}})$$

$$\mathbf{Card}(\mathbf{B}) = \mathbf{C}_5^3 \times \mathbf{C}_5^1 + \mathbf{C}_3^3 \times \mathbf{C}_7^1 = 57$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{B}) = \frac{\mathbf{Card}(\mathbf{B})}{\mathbf{Card}(\Omega)} = \frac{57}{210} = \frac{19}{70}$$

2) Soit X la variable aléatoire liant chaque tirage au nombre de boules vertes tirées.

a) Montrer que  $P(X = 2) = \frac{2}{15}$

$$2(V) \quad 8(\bar{V})$$

$$\text{card}(X = 2) = C_2^2 \times C_8^2 = 28$$

$$P(X = 2) = \frac{\text{card}(X = 2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$$

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et montrer que l'espérance mathématique

E(X) est égale à  $\frac{4}{5}$

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2\}$$

$$\text{card}(X = 0) = C_8^4 = 70$$

$$P(X = 0) = \frac{\text{card}(X = 0)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{70}{210} = \frac{1}{3}$$

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{8}{15}$$

|        |               |                |                |
|--------|---------------|----------------|----------------|
| k      | 0             | 1              | 2              |
| P(X=k) | $\frac{1}{3}$ | $\frac{8}{15}$ | $\frac{2}{15}$ |

(On a  $\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = 1$ )

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{8}{15} + 2 \times \frac{2}{15} = \frac{4}{5}$$

**Exercice 3 :**

1) Résoudre dans C :  $z^2 + 4z + 8 = 0$

$$\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 8 \Leftrightarrow \Delta = 16 - 32 \Leftrightarrow \Delta = -16$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-4 + i\sqrt{16}}{2} = \frac{-4 + 4i}{2} = -2 + 2i \text{ et } z_2 = \bar{z}_1 = -2 - 2i$$

D'où  $S = \{-2 - 2i; -2 + 2i\}$

2) A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2 + 2i ; b = 4 - 4i ; c = 4 + 8i$$

a) Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre

A et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

Montrer que :  $z' = -iz - 4$

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - a) + a$$

$$\Leftrightarrow z' = \left( \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right) (z + 2 - 2i) - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -i(z + 2 - 2i) - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz - 2i - 2 - 2 + 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = -iz - 4$$

D'où  $z' = -iz - 4$

b) Vérifier que le point B est l'image du point C par la rotation R et en déduire la nature du triangle ABC.

$$R(C) = B \Leftrightarrow b = -ic - 4 ?$$

$$b = -i(4 + 8i) - 4 \Leftrightarrow b = -4i + 8 - 4 \Leftrightarrow b = 4 - 4i$$

D'où  $R(C) = B$

$$\text{On a } R(C) = B \Leftrightarrow \begin{cases} AC = AB \\ (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

D'où ABC est un triangle rectangle isocèle en A.

3) a) Montrer que  $|c - \omega| = 6$

$\omega$  l'affixe du point  $\Omega$ , milieu du segment [BC]

$$\omega = \frac{b + c}{2} = \frac{4 - 4i + 4 + 8i}{2} = 4 + 2i \text{ donc } \omega = 4 + 2i$$

$$\text{Donc } |c - \omega| = |4 + 8i - 4 - 2i| = |6i| = 6|i| = 6$$

D'où  $|c - \omega| = 6$

b) Montrer que l'ensemble des points M d'affixe z tels que  $|z - \omega| = 6$  est le cercle circonscrit au triangle ABC.

$$|z - \omega| = 6 \Leftrightarrow \Omega M = 6 \quad M(z) \quad \Omega(\omega)$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que  $|z - \omega| = 6$  est le cercle de centre  $\Omega$  et de rayon 6.

On a  $|c - \omega| = 6 \Leftrightarrow \Omega C = 6$  or  $\Omega$  est le milieu du segment [BC] donc  $\Omega B = \Omega C = 6$

$$|a - \omega| = |-2 + 2i - 4 - 2i| \Leftrightarrow \Omega A = |-6| \Leftrightarrow \Omega A = 6$$

$$\Omega A = \Omega B = \Omega C = 6$$

D'où l'ensemble des points M d'affixe z : tels que  $|z - \omega| = 6$  est le cercle circonscrit au triangle ABC.

**Exercice 3 :**

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + 12 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 17$$

1) a) Montrer que :  $U_n > 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour  $n = 0$  on a  $U_0 = 17$  donc  $U_0 > 16$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $U_n > 16$  et montrons

que  $U_{n+1} > 16$  Puisque  $U_n > 16$  donc

$$U_n > 16 \Leftrightarrow \frac{1}{4}U_n > \frac{1}{4} \times 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}U_n + 12 > 4 + 12 \Leftrightarrow U_{n+1} > 16$$

D'où  $U_n > 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante et en déduire que la suite  $(U_n)$  est convergente.

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + 12 - U_n$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{48 - 3U_n}{4} = \frac{3}{4}(16 - U_n)$$

On a  $U_n > 16$  donc  $0 > 16 - U_n$

$$\frac{3}{4}(16 - U_n) < 0 \quad \text{Donc } U_{n+1} - U_n < 0$$

d'où  $(U_n)$  est décroissante.

On a  $(U_n)$  est décroissante et minorée par 16.

D'où la suite  $(U_n)$  est convergente

2) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = U_n - 16 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a) Montrons que  $(V_n)$  est une suite géométrique

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 16 = \frac{1}{4}U_n + 12 - 16$$

$$= \frac{1}{4}U_n - 4 = \frac{1}{4}(U_n - 16) = \frac{1}{4}V_n$$

$$\text{Donc } V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n$$

D'où  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$

$$\text{b) En déduire que } U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

puis déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .

On a  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$  de

$$\text{premier terme } V_0 = \frac{U_0 - 16}{3 - U_0} = 1$$

$$V_0 = U_0 - 16 = 17 - 16 = 1 \quad \text{et} \quad V_n = V_0 \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\text{Donc } V_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{or} \quad V_n = U_n - 16$$

$$\text{Donc } U_n = V_n + 16$$

$$\text{D'où } U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim U_n = \lim \left(16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 16 \quad \text{car} \quad -1 < \frac{1}{4} < 1$$

$$\text{D'où } \lim U_n = 16$$

c) Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  pour laquelle  $U_n < 16,0001$

$$\text{On a } U_n = 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n \quad \text{et} \quad 16 + \left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < 16,0001 - 16 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 0,0001$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-4} \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{4}\right)^n < \log 10^{-4}$$

$$\Leftrightarrow n \log\left(\frac{1}{4}\right) < -4 \log 10 \Leftrightarrow -n \log(4) < -4$$

$$\Leftrightarrow n \log(4) > 4 \Leftrightarrow n > \frac{4}{\log(4)}$$

$$n > \frac{4}{\log(4)} \Leftrightarrow n > 6,6438$$

La plus petite valeur de l'entier naturel  $n$  pour laquelle

$$U_n < 16,0001 \quad \text{est} \quad n = 7$$

## Problème :

I) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = 1 - (x+1)^2 e^x$$

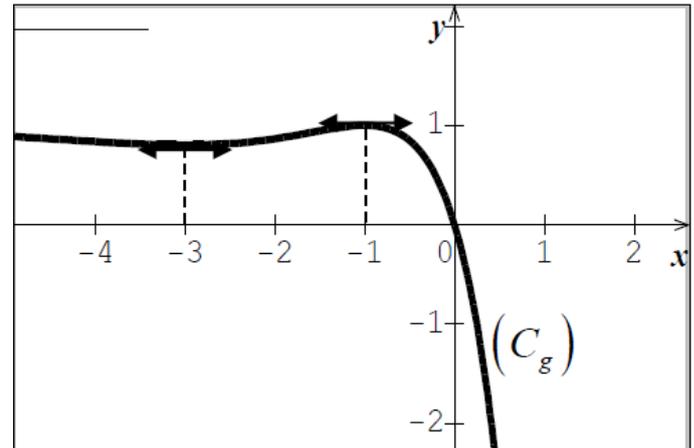
1) Vérifier que  $g(0) = 0$

$$g(0) = 1 - (0+1)^2 e^0 = 1 - 1 = 0$$

2) Montrer que  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$  et

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$$

A partir de la courbe représentative  $(C_g)$  de la fonction  $g$



On sait que  $(C_g)$  est en dessous de l'axe des abscisses

sur  $[0; +\infty[$  d'où  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$

et  $(C_g)$  est au-dessus de l'axe des abscisses sur

$]-\infty; 0]$  d'où  $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$

II) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

Soit  $(C)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm)

$$1) \text{ a) Vérifier que } f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  puis en déduire que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x &= x + 1 - 4 \frac{x^2}{4} e^{\frac{2x}{2}} - e^x \\ &= x + 1 - x^2 e^x - e^x = x + 1 - (x^2 + 1)e^x = f(x) \end{aligned}$$

$$\text{D'où } f(x) = x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 - e^x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left( \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = -\infty$$

Car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \left( \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0$$

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1)$  et en déduire que

La droite (D) d'équation  $y = x + 1$  est asymptote au voisinage de  $-\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 - 4 \left( \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x - (x + 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 \left( \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 - e^x = 0$$

Car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 4 \left( \frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} \right)^2 = 0$

Donc  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = 0$  d'où la droite (D)

d'équation  $y = x + 1$  est asymptote au voisinage de  $-\infty$ .

$$f(x) - (x + 1) = -(x^2 + 1)e^x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Car  $(x^2 + 1) > 0$  et  $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où (C<sub>f</sub>) est en dessous de la droite (D) sur  $\mathbb{R}$

2) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(On pourra écrire  $f(x)$  sous forme  $x \left[ 1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x \right]$ )

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \frac{1}{x}) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x + \frac{1}{x})e^x = -\infty$$

b) Montrer que (C<sub>f</sub>) admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique dont on déterminera la direction

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left[ 1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x \right]}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} - (x + \frac{1}{x})e^x = -\infty$$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -(x + \frac{1}{x})e^x = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

la courbe (C) admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction des ordonnées

3) a) Montrer que :  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x + 1 - (x^2 + 1)e^x$$

$$f'(x) = 1 - 2xe^x - (x^2 + 1)e^x = 1 - (x^2 - 2x + 1)e^x = 1 - (x + 1)^2 e^x = g(x)$$

D'où  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Montrer que la fonction  $f$  est croissante sur  $]-\infty; 0]$  et décroissante sur  $[0; +\infty[$  puis dresser le tableau de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $f'(x) = g(x)$  or  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$

Et  $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$

$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$  donc  $f$  est

décroissante sur  $[0; +\infty[$

Et  $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$  donc  $f$  est

croissante sur  $]-\infty; 0]$

|       |           |   |           |
|-------|-----------|---|-----------|
| X     | 0         | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) | -         | 0 | +         |
| f(x)  | $-\infty$ | 0 | $-\infty$ |

c) Montrer que la courbe (C<sub>f</sub>) admet deux points d'inflexions d'abscisses  $-3$  et  $-1$

On a  $f''(x) = g'(x)$

Donc

$$f''(x) = g'(x) = -2(x + 1)e^x - (x + 1)^2 e^x$$

$$f''(x) = (x + 1)e^x(-2 - x - 1) = (x + 1)(-x - 3)e^x$$

Or  $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(-x - 3) = 0$$

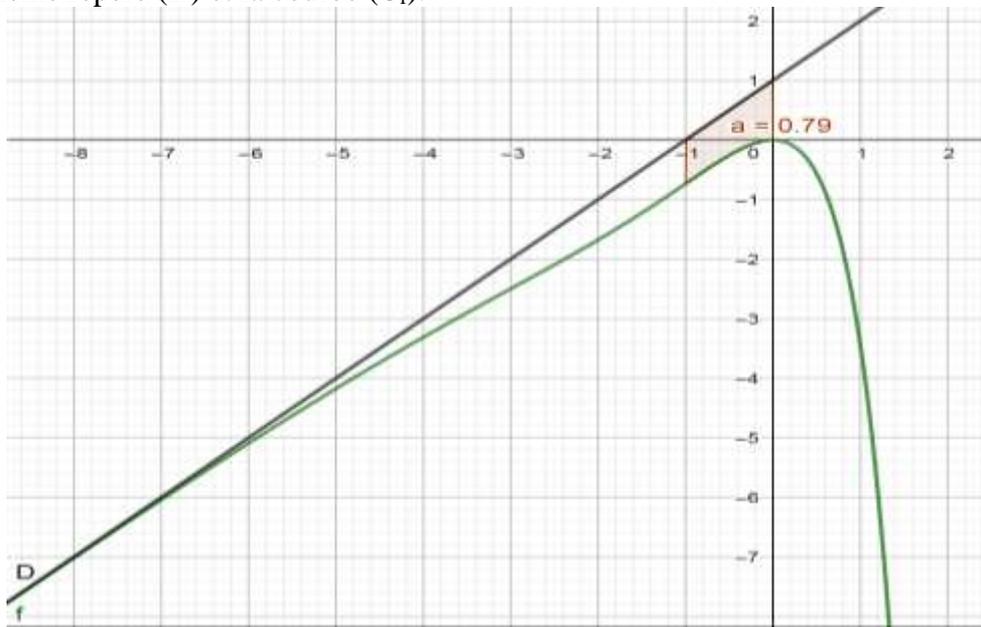
$$\Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ ou } -x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = -3$$

|          |           |      |      |           |
|----------|-----------|------|------|-----------|
|          | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $+\infty$ |
| $-x - 3$ | +         | 0    | -    | -         |
| $x + 1$  | -         | -    | 0    | +         |
| $f''(x)$ | -         | 0    | +    | -         |

la courbe (C) admet deux points d'inflexions d'abscisses  $-3$  et  $-1$

4) Tracer dans le même repère (D) et la courbe (C<sub>f</sub>).



5) a) Vérifier  $H : x \rightarrow (x-1)e^x$  est une fonction primitive de la fonction  $h : x \rightarrow xe^x$  sur  $\mathbb{R}$ .

Puis montrer que  $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

$$H'(x) = ((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = h(x)$$

$$= (1+x-1)e^x = xe^x = h(x)$$

D'où H est une primitive de h sur  $\mathbb{R}$   $\int_{-1}^0 xe^x dx = [(x-1)e^x]_{-1}^0 = -1 + 2e^{-1} = \frac{2}{e} - 1$

D'où  $\int_{-1}^0 xe^x dx = \frac{2}{e} - 1$

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que :

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3(1 - \frac{2}{e})$$

$$u(x) = x^2 + 1 \quad u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$$

$$\int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = [(x^2 + 1)e^x]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2xe^x dx$$

$$= 1 - 2e^{-1} - 2 \int_{-1}^0 xe^x dx = 1 - 2e^{-1} - 2(\frac{2}{e} - 1) \quad \text{D'où } \int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx = 3(1 - \frac{2}{e})$$

$$= 3 - 6e^{-1} = 3(1 - \frac{2}{e})$$

c) Calculer, en  $\text{cm}^2$ , l'aire du domaine plan limité par la courbe (C<sub>f</sub>), la droite (D) l'axe des ordonnées et la droite  $x = -1$

$$A = \int_{-1}^0 (x+1 - f(x)) dx \times 2\text{cm} \times 2\text{cm}$$

$$A = \int_{-1}^0 (x^2 + 1)e^x dx \times 4\text{cm}^2 = 3(1 - \frac{2}{e})4\text{cm}^2$$

$$\text{D'où } A = 12(1 - \frac{2}{e})\text{cm}^2$$