www.leadingeducation.ma

Correction des exercices de la Série 2

Exercice d'application 1 :

1. (a) Calcul de l'accélération angulaire du point M :

La vitesse angulaire est constante ($\theta = 10 \text{ rad/s}$), donc l'accélération angulaire est nulle :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0 \text{ rad/s}^2$$

1. (b) Nature du mouvement :

Le mouvement est uniforme (vitesse angulaire constante) et circulaire.

1. (c) Expression de l'abscisse angulaire : L'abscisse angulaire est donnée par :

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t = 2 + 10t \text{ rad}$$

—

2. (a) Vitesse angulaire du point N : Dérivons $\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6$:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = 20t + 40 \text{ rad/s}$$

2. (b) Accélération angulaire du point N : Dérivons $\omega(t)$:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = 20 \text{ rad/s}^2$$

2. (c) Nature du mouvement : Le mouvement est uniformément accéléré (accélération angulaire constante).

—

Exercice 1 :

1. Signification physique :

- Fil inextensible : La longueur du fil ne change pas, donc la vitesse linéaire du solide S est égale à la vitesse tangentielle du cylindre.
- Fil ne glisse pas : La condition de non-glissement implique $v = r\omega$, où v est la vitesse linéaire du solide S, r est le rayon du cylindre, et ω est sa vitesse angulaire.

2. Accélération du système : Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide S :

$$mg - T = ma$$

Pour le cylindre, le moment des forces donne :

$$T \cdot r = I\alpha$$

Avec $I = \frac{1}{2}Mr^2 + 2m_1 l^2$ et $a = r\alpha$, on trouve :

$$a = \frac{mg}{\frac{1}{2}M + 2m_1\left(\frac{l}{r}\right)^2 + m}$$

Calcul numérique :

$$a = \frac{10\times10}{0.5+2\times0.5\left(\frac{0.5}{0.1}\right)^2+10} = \frac{100}{0.5+25+10} = \frac{100}{35.5} \approx 2.82\ \mathrm{m/s^2}$$

3. Vitesse angulaire du cylindre : En utilisant $v^2 = 2ah$ et $v = r\omega$:

$$\omega = \frac{\sqrt{2ah}}{r} = \frac{\sqrt{2\times2.82\times5}}{0.1} \approx \frac{\sqrt{28.2}}{0.1} \approx 53.1\ \mathrm{rad/s}$$

—

Exercice 3 : Freinage d'un anneau en rotation

1. Nature du mouvement pendant le freinage Le mouvement est uniformément décéléré (accélération angulaire constante et négative) car :

- Un couple résistant constant ($\mathcal{M}_C = -0{,}2\ \mathrm{N\cdot m}$) est appliqué.

- Les frottements sont négligés, donc la décélération est uniquement due à $\mathcal{M}_C$.

—

2. Accélération angulaire (α) La relation fondamentale de la dynamique en rotation donne :

$$\mathcal{M}_C = J_\Delta \cdot \alpha\alpha = \frac{\mathcal{M}_C}{J_\Delta}$$

Avec $J_\Delta = 8 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg\cdot m^2}$:

$$\alpha = \frac{-0{,}2}{8\times10^{-3}} = -25\ \mathrm{rad/s^2}$$

Le signe négatif indique une décélération.

—

3. Durée de freinage (t) La vitesse initiale est :

$$\omega_0 = 90\ \mathrm{tours/min} = 90 \times \frac{2\pi}{60} = 9{,}42\ \mathrm{rad/s}$$

Le temps jusqu'à l'arrêt ($\omega = 0$) est :

$$\omega = \omega_0 + \alpha tt = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{9{,}42}{25} \approx 0{,}377\ \mathrm{s}$$

—

Exercice 4 : Système de deux cylindres et masses

1. Sens du mouvement Le système se déplace dans le sens où la masse m_2 descend (car $2m_2 > m_1$ soit $4\ \text{kg} > 3\ \text{kg}$).

2. Équation différentielle du mouvement En appliquant la dynamique translationnelle et rotationnelle :

- Pour m_1 (montée) : $T_1 - m_1 g = -m_1 a_1$
- Pour m_2 (descente) : $m_2 g - T_2 = m_2 a_2$ - Pour le cylindre : $(T_2 r_2 - T_1 r_1) = J_\Delta \alpha$

Avec les relations cinématiques ($a_1 = r_1\alpha$, $a_2 = r_2\alpha = 2r_1\alpha$) et en substituant, on obtient :

$$\ddot{\theta} = \frac{r_1 g(2m_2 - m_1)}{J_\Delta + r_1^2(4m_2 + m_1)}$$

Remarque : $r_2 = 2r_1 = 40\ \text{cm} r_1 = 20\ \text{cm}.$

—

3. Accélérations linéaires (a_1 et a_2) Calcul de $\ddot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{0{,}2 \times 10 \times (4-3)}{0{,}17 + (0{,}2)^2(8+3)} = \frac{2}{0{,}17 + 0{,}44} = \frac{2}{0{,}61} \approx 3{,}28\ \text{rad/s}^2$$

- $a_1 = r_1\ddot{\theta} = 0{,}2 \times 3{,}28 \approx 0{,}656\ \text{m/s}^2$ (vers le haut).
- $a_2 = r_2\ddot{\theta} = 0{,}4 \times 3{,}28 \approx 1{,}312\ \text{m/s}^2$ (vers le bas).

—

4. Tensions des fils (T_1 et T_2) - $T_1 = m_1(g - a_1) = 3 \times (10 - 0{,}656) \approx 28{,}03\ \text{N}$. - $T_2 = m_2(g - a_2) = 2 \times (10 - 1{,}312) \approx 17{,}38\ \text{N}$.

—

5. Accélération au point M (contact f_2/D_2) Quand m_2 descend de $h/2 = 0{,}25\ \text{m}$:

- Vitesse v : $v^2 = 2a_2 \times 0{,}25 v \approx \sqrt{0{,}656} \approx 0{,}81\ \text{m/s}.$
- Accélération tangentielle : $a_T = r_2\ddot{\theta} \approx 1{,}312\ \text{m/s}^2$. - Accélération normale : $a_N = \frac{v^2}{r_2} = \frac{0{,}656}{0{,}4} \approx 1{,}64\ \text{m/s}^2$.
- Vecteur accélération : $\vec{a}_M = a_T\,\vec{u}_T + a_N\,\vec{u}_N$.

Norme :

$$a_M = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{1{,}312^2 + 1{,}64^2} \approx 2{,}10\ \text{m/s}^2$$

Direction : Angle ϕ avec la tangente tel que $\tan\phi = \frac{a_N}{a_T} \approx 1{,}25 \phi \approx 51{,}3°$.