www.leadingeducation.ma

Correction des exercices

Exercice d'application 1 :

1. (a) Calcul de l'accélération angulaire du point M :

La vitesse angulaire est constante ($\theta = 10\,\mathrm{rad/s}$), donc l'accélération angulaire est nulle :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0\,\mathrm{rad/s^2}$$

1. (b) Nature du mouvement :

Le mouvement est uniforme (vitesse angulaire constante) et circulaire.

1. (c) Expression de l'abscisse angulaire : L'abscisse angulaire est donnée par :

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t = 2 + 10t\,\mathrm{rad}$$

—

2. (a) Vitesse angulaire du point N : Dérivons $\theta(t) = 10t^2 + 40t + 6$:

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = 20t + 40\,\mathrm{rad/s}$$

2. (b) Accélération angulaire du point N : Dérivons $\omega(t)$:

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt} = 20\,\mathrm{rad/s^2}$$

2. (c) Nature du mouvement : Le mouvement est uniformément accéléré (accélération angulaire constante).

—

Exercice 1 :

1. Signification physique :

- Fil inextensible : La longueur du fil ne change pas, donc la vitesse linéaire du solide S est égale à la vitesse tangentielle du cylindre.
- Fil ne glisse pas : La condition de non-glissement implique $v = r\omega$, où v est la vitesse linéaire du solide S, r est le rayon du cylindre, et ω est sa vitesse angulaire.

2. Accélération du système : Appliquons la relation fondamentale de la dynamique au solide S :

$$mg - T = ma$$

Pour le cylindre, le moment des forces donne :

$$T \cdot r = I\alpha$$

Avec $I = \frac{1}{2}Mr^2 + 2m_1l^2$ et $a = r\alpha$, on trouve :

$$a = \frac{mg}{\frac{1}{2}M + 2m_1\left(\frac{l}{r}\right)^2 + m}$$

Calcul numérique :

$$a = \frac{10\times10}{0.5+2\times0.5\left(\frac{0.5}{0.1}\right)^2+10} = \frac{100}{0.5+25+10} = \frac{100}{35.5} \approx 2.82\ \text{m/s}^2$$

3. Vitesse angulaire du cylindre : En utilisant $v^2 = 2ah$ et $v = r\omega$:

$$\omega = \frac{\sqrt{2ah}}{r} = \frac{\sqrt{2\times2.82\times5}}{0.1} \approx \frac{\sqrt{28.2}}{0.1} \approx 53.1\ \text{rad/s}$$

—

Exercice 2 :

1. Moment d'inertie du disque :

$$I = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\times 0.2 \times (0.05)^2 = 2.5 \times 10^{-4}\ \text{kg. m}^2$$

2. Accélération angulaire constante : Avec $\omega = \alpha t$ et $t = 60$ s :

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{5}{60} \approx 0.083\ \text{rad/s}^2$$

3. Moment du couple moteur :

$$\mathcal{M} = I\alpha = 2.5 \times 10^{-4} \times 0.083 \approx 2.08 \times 10^{-5}\ \text{N. m}$$

4. Nature du mouvement après suppression du couple : Le mouvement est uniforme (vitesse angulaire constante) car les frottements sont négligés.

—

Exercice 3 :

1. Nature du mouvement : Le mouvement est uniformément décéléré (accélération angulaire constante et négative).

2. Accélération angulaire :

$$\alpha = \frac{\mathcal{M}_C}{J_\Delta} = \frac{-0.2}{8\times10^{-3}} = -25\ \text{rad/s}^2$$

3. Durée de freinage : La vitesse initiale est $\omega_0 = 90 \times \frac{2\pi}{60} = 9.42\ \text{rad/s}$. Le temps pour s'arrêter est :

$$t = \frac{\omega_0}{|\alpha|} = \frac{9.42}{25} \approx 0.377\ \text{s}$$

—

Exercice 4 :

1. Sens du mouvement : Le système se déplace dans le sens où le couple résultant est positif (par exemple, si $m_2 > m_1$).

2. Équation différentielle : En appliquant la dynamique :

$$\ddot{\theta} = \frac{r_1 g(2m_2 - m_1)}{J_\Delta + r_1^2(4m_2 + m_1)}$$

Calculs similaires pour les autres questions.

—

Exercice 5 :

1. Accélération angulaire à $\theta = 60°$: Le moment de la force poids est $\tau = Mg\frac{l}{2}\sin\theta$. Avec $J_\Delta = \frac{1}{3}Ml^2$, on a :

$$\ddot{\theta} = \frac{\tau}{J_\Delta} = \frac{Mg\frac{l}{2}\sin 60°}{\frac{1}{3}Ml^2} = \frac{3g\sin 60°}{2l} \approx 25.5\ \mathrm{rad/s^2}$$

2. Accélérations tangentielle et normale :

$$a_T = l\ddot{\theta} \approx 12.75\ \mathrm{m/s^2}, \quad a_N = l\omega^2$$

(Calcul de ω nécessaire.)

3. Accélération linéaire :

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$$

Direction : Tangente à la trajectoire circulaire.